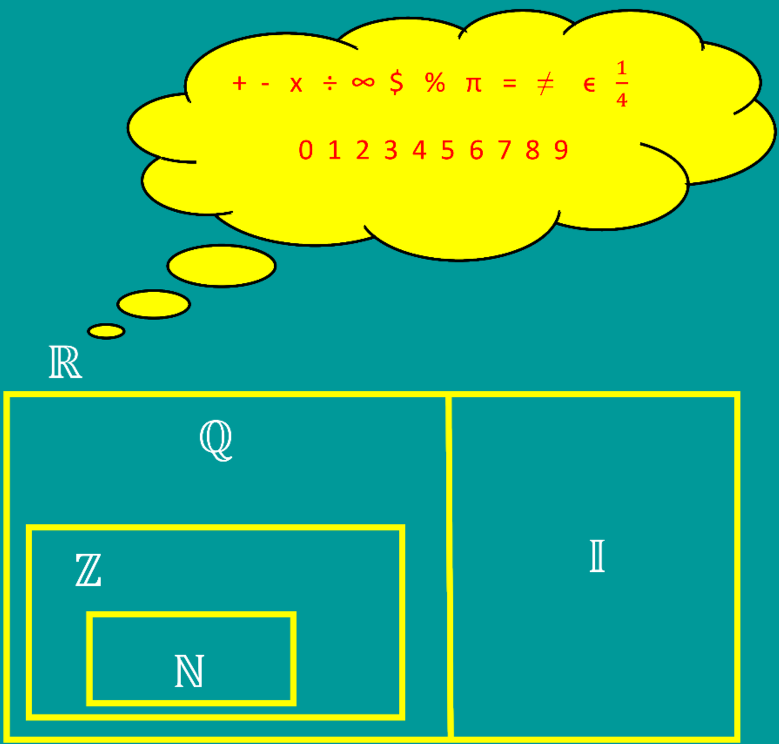
Pedro Pereira Cortes Filho

NO COMPASSO DA ARITMÉTICA



editora itacaiúnas

Pedro Pereira Cortes Filho

NO COMPASSO DA ARITMÉTICA

1ª edição

Editora Itacaiúnas
Ananindeua – PA
2022

1ª edição

Editoração eletrônica/ diagramação: Walter Rodrigues
Projeto de capa: o autor
Revisão: Prof. Dr. Claudio de Sousa Galvão

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD

C828 No compasso da aritmética [recurso eletrônico] / Pedro Pereira Cortes Filho. - 1. ed. – Ananindeua : Itacaiúnas, 2022.
73 p. : il.: PDF ; 3,01 MB.

Inclui bibliografia e índice.
ISBN: 978-65-89910-78-7
DOI: 10.36599/itac-nocomar

1. Matemática. 2. Aritmética. 3. Educação. I. Título.

CDD 510
CDU 511.1

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática 510
2. Aritmética 511.1

E-book publicado no formato PDF (*Portable Document Format*). Utilize software Adobe Reader para uma melhor experiência de navegabilidade nessa obra.

Esta obra foi publicada pela **Editora Itacaiúnas** em março de 2022.

APRESENTAÇÃO

Este livro foi pensado e desenvolvido a partir dos estudos, análises e conclusões da pesquisa intitulada “O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA ARITMÉTICA NA EJA EM UMA ESCOLA PÚBLICA TOCANTINENSE”, do Mestrado Profissional em Educação pela Universidade Federal do Tocantins (UFT). Com o objetivo de contribuir com a melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática, em especial da aritmética, a obra apresenta uma linguagem comunicativa simples, dinâmica e objetiva que favorece o envolvimento e a compreensão dos temas abordados por parte daqueles que a utilizam.

Este material busca apresentar uma proposta alternativa ao currículo da Matemática/aritmética para o Ensino Fundamental, especialmente na Educação de Jovens e Adultos (EJA) - Segundo Segmento, mostrando o quanto ela é essencial na vida, independentemente da atividade profissional que exerça. Ademais, o domínio das habilidades aritméticas torna o dia a dia mais prático, acessível e transformador. A escolha dos conteúdos caracterizou-se por sua importância na utilização cotidiana, na continuidade dos estudos e no preparo para concursos e vestibulares. Fundamentada basicamente na resolução de problemas, tem como foco os desafios e anseios da aprendizagem matemática, com uma proposta pedagógica que auxilia na construção de novos saberes, com uma escrita e linguagem voltada para a realidade social, econômica e cultural, em particular do Estado do Tocantins.

A obra é formada por 12 capítulos. Possui uma abordagem metodológica sistematizada a partir de situações-problema, utilizando-se de algumas ilustrações que favorecem e ampliam o campo da compreensão dos conceitos. Os capítulos são compostos por definições, representações, exemplificações e aplicações. Ao final de cada um deles, tem-se uma pequena reflexão, na visão do autor, sobre o tema abordado, seguido de algumas atividades problematizadas, cujas respostas podem ser facilmente conferidas no final do livro.

Espera-se que este material possa contribuir para uma Educação mais democrática, acessível e de qualidade, e que os estudantes vejam nesta produção uma abertura para inserção no universo das oportunidades, seja na vida ou no trabalho. Enfim, que possa ser útil a todos aqueles que a utilizem, seja para revisar, ensinar ou simplesmente aprofundar os conhecimentos matemáticos, especificamente na aritmética. Neste sentido, este material pode contribuir para um aprendizado mais significativo, possibilitando o desenvolvimento das capacidades matemáticas, sanando dúvidas, ampliando saberes e ajudando nas conquistas.

SOBRE O AUTOR

Mestre em Educação pela Universidade Federal do Tocantins - UFT. Especialização em Avaliação Escolar em Matemática pela Fundação CESGRANRIO/RJ. Especialização em Metodologias Inovadoras Aplicadas à Educação na Área Específica de Matemática, Ciências e Suas Tecnologias pela FACINTER/Curitiba-PR. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual do Tocantins – UNITINS. Professor de Matemática do Instituto Federal do Tocantins – IFTO.

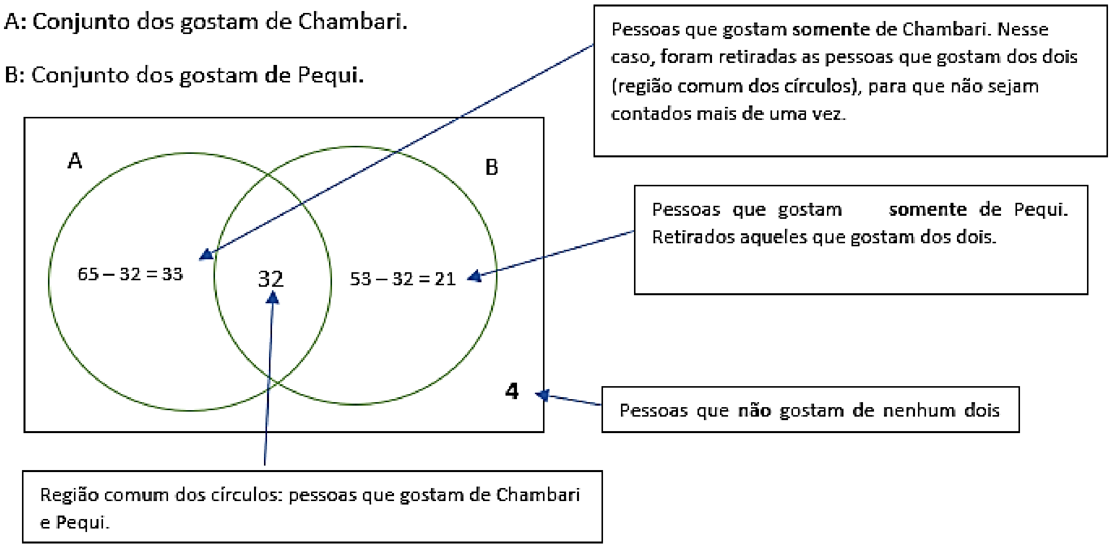
SUMÁRIO

1. NOÇÕES DE CONJUNTOS

Antes de aprofundarmos na teoria dos conjuntos, vamos desenvolver uma atividade para aguçarmos o aprendizado.

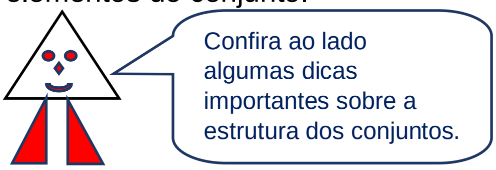
Problema: Foi realizada uma pesquisa com alguns Tocantinenses sobre a gastronomia local. Em se tratando do gosto pelo Chambari ou pequi, obteve-se o seguinte resultado: 65 pessoas disseram que gostam do Chambari, 53 do Pequi e 32 disseram gostar dos dois. Apenas 4 pessoas disseram não gostar nem de Chambari nem de Pequi. Quantas pessoas foram entrevistadas?

Resolução:
Primeiro vamos traçar dois círculos, de forma que eles tenham uma região comum (veja na figura abaixo).
Cada círculo representa um dos conjuntos A ou B.
Na região comum dos círculos ficam aqueles que gostam dos dois (Chambari e Pequi). Esta deve ser a primeira região a ser preenchida.
E fora dos círculos ficam aqueles que não gostam de nenhum dos dois.



A resposta final é dada pela soma dos valores em cada região da figura, ou seja, 33 + 32 + 21 +4 = 90 pessoas.

A noção de conjunto é tão simples quanto fundamental na Matemática. Muito utilizada para expressar conceitos matemáticos, ela nos remete a ideia de agrupamento ou coleção de objetos bem definidos e discerníveis, chamados elementos do conjunto.



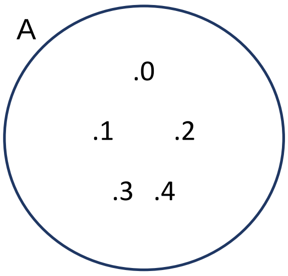
I. Um conjunto é designado, em geral, por uma letra latina maiúscula (A, B, C, ..., X, Y, Z);
II. Um elemento é designado, em geral, por uma letra latina minúscula (a, b, c, ..., x, y, z);
III. A relação entre elemento e conjunto é de pertinência, denotada pelo símbolo ϵ, que se lê "pertence a".

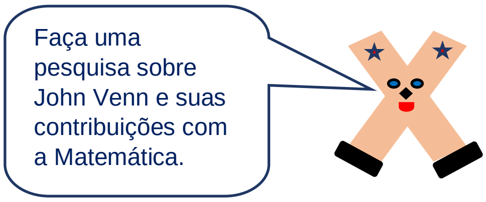
Um conjunto pode ser representado basicamente de três maneiras:

- Colocando seus elementos entre chaves, separados por vírgula.
Exemplo: A = {0, 1, 2, 3, 4}.
Nesse caso, podemos perceber que $2 \in A$ (Lê-se: ‘dois pertence a A’) e $5 \notin A$ (lê-se: ‘5 não pertence a A’).

- Por meio de uma propriedade própria dos elementos.
Exemplo: A = {x | x é um número natural menor que 5}. O símbolo ‘|’ significa “tal que”.

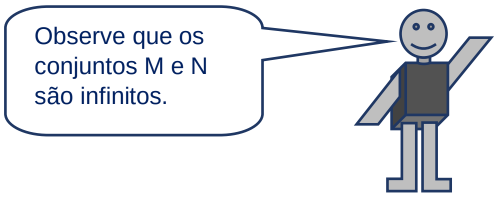
- Desenhando uma figura (diagrama de **Venn**).





1.1 Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmos elementos.
Exemplo: M = {x | x é um número natural maior que 5} e N = {6, 7, 8, 9, 10, 11, ...}.
Temos que M = N.
São conjuntos diferentes quando existe pelo menos um elemento que pertença a um dos conjuntos e não pertença ao outro.
Exemplo: E = {1, 2, 3} e F = {0, 1, 2, 3}. Note que $E \neq F$, pois 0 ∈ F e 0 ∉ E.

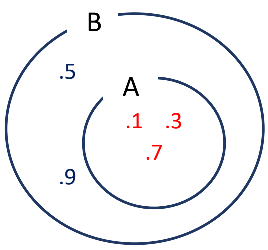


1.2 Subconjuntos – relação de inclusão

Um conjunto A é subconjunto do conjunto B se, e somente se, todos os elementos de A pertencerem a B.

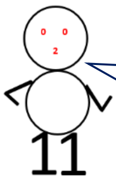
Exemplo: A = {1, 3, 7} e B = {1, 3, 5, 7, 9}. Note que todos os elementos de A são também elementos de B. Assim, [lê-se: ‘A está contido em B’ $(B \subset A)$] ou [lê-se: ‘B contém A’ $(A \supset B)$].

Pelo diagrama de Venn:



1.3 Operações com conjuntos

União	Intersecção	Diferença
$A \cup B$ (lê-se: 'A união B'): Conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A, a B ou ambos. Exemplo: A = {1, 2, 3, 4, 5} B = {0, 2, 4, 6} $A \cup B$ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}	$A \cap B$ (lê-se: 'A intersecção B'): Conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B. Exemplo: A = {1, 2, 3, 4, 5} B = {0, 2, 4, 6} $A \cap B$ = {2, 4}	A – B (lê-se: 'A menos B'): Conjunto formado pelos elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B. Exemplo: A = {1, 2, 3, 4, 5} B = {0, 2, 4, 6} A – B = {1, 3, 5}

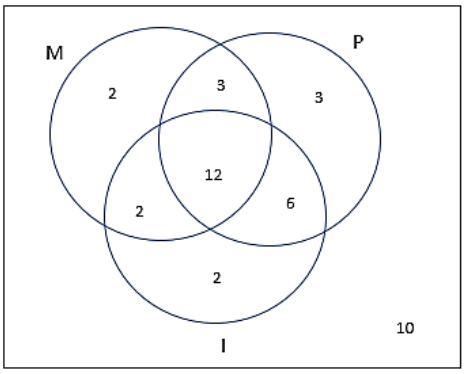


Fique ligado!
I. Quando $A \cap B = \emptyset$ (conjunto vazio, ou seja, não possui elementos), dizemos que A e B são disjuntos. Assim, $A - B = A$ e $B - A = B$
II. Quando $A \subset B$ temos que: $A \cap B = A$ e $A \cup B = B$

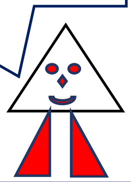
Aplicações:

1. Suponha que um colégio na cidade de Palmas no Tocantins, tenha divulgado os seguintes resultados das disciplinas de Matemática, Português e Inglês: De uma turma de 40 alunos, 19 foram aprovados em Matemática, 24 em Português e 22 em Inglês. Quinze foram aprovados em matemática e Português, 14 em Matemática e Inglês, 18 em Português e Inglês. Doze alunos foram aprovados nas três disciplinas. Quantos alunos dessa turma foram reprovados em Matemática, Português e inglês?

Resolução:
M: conjunto dos alunos aprovados em Matemática.
P: Conjunto dos alunos aprovados em Português.
I: Conjunto dos alunos aprovados em Inglês.



Proposta para essa atividade: Cada aluno procure entender como foi realizado essa resolução. Depois, os estudantes socializam com a turma suas conclusões intermediadas pelo professor. No final, o professor realiza suas considerações, inclusive levantando novos questionamentos, por exemplo: quantos alunos foram aprovados somente em Matemática? Quantos alunos foram aprovados em mais de uma disciplina? Etc.



Resposta: 10 alunos reprovaram nessas três disciplinas.

Reflexão do autor:
Os conjuntos fazem parte do cotidiano. É possível perceber a aplicação dos conhecimentos acerca dessa teoria em diversas situações e atividades humanas, indo desde procedimentos mais simples como, por exemplo, separação e seleção de sementes para uma plantação, organização de equipes de trabalho, formação de turmas em uma escola, distribuição de pessoal por setores em uma empresa de acordo com as habilidades exigidas, etc., até a aplicação em ramos mais específicos como na Engenharia, Estatística, Astronomia, Geografia, etc. O aprendizado sobre conjuntos se faz necessário, pois ajuda a desenvolver a capacidade de raciocínio, compreensão e análise, podendo assim, influenciar positivamente na forma como o indivíduo atua e interpreta a realidade.

ATIVIDADES I

1. Dados os conjuntos: A = {1, 3, 4, 7, 9}, B = {0, 1, 2, 3, 5} e C = {0, 2, 4, 6, 8}.
Determine os conjuntos:
a) $A \cup B \cup C$
b) $(B - A) \cap (C - A)$
c) $(A \cup C) - B$
d) $A \cap B \cap C$
e) $(B \cap C) \cup (A - B)$

2. O Parque Estadual do Jalapão é um dos principais pontos turísticos do estado do Tocantins que concentra inúmeros rios de água cristalina, cachoeiras, dunas, chapadas e corredeiras. O rio Azuis com águas cristalinas, localizado no município de Aurora – TO, é conhecido como o menor rio do mundo. Estes pontos turísticos atraem pessoas de todo o Brasil. Em uma pesquisa realizada com alguns habitantes da cidade de Gurupi – TO, sobre qual dos dois destinos gostaria de conhecer, o resultado foi o seguinte: 40 pessoas disseram que gostariam de conhecer o Azuis, 52 o Jalapão, 25 gostariam de conhecer os dois lugares e apenas duas pessoas disseram que não gostariam de conhecer nenhum desses lugares. Quantas pessoas foram entrevistadas nessa pesquisa?

3. Em um levantamento de dados feito em um supermercado na cidade de Araguatins – TO sobre o consumo de dois produtos A e B, constatou-se que dentre os 100 clientes procurados, 30 consumiam o produto A, 50 consumiam o produto B e 25 pessoas não consumiam nenhum dos dois produtos. Quantos desses clientes consumiam os dois produtos?

4. Seja **n** o número de elementos de um conjunto. Considere que $n(A) = 18$, $n(B) = 27$ e $n(A \cup B) = 38$, determine $n(A - B)$.

5. Nove palestrantes vieram ao estado do Tocantins para falar sobre o aquecimento global. Cinco estiveram em Palmas, 4 em Gurupi e 4 em Dianópolis. Três desses palestrantes estiveram em Palmas e Dianópolis, e apenas um deles esteve nas três cidades. Qual o número de palestrantes que estiveram somente em Palmas?

6.Uma professora de uma escola no Tocantins sugeriu aos seus alunos a leitura de três obras da Literatura Tocantinense:
I. *Bem-te-vi* de Ernesto Silva;
II. *Terra entre Rios* de Walace Rodrigues;
III. *As Tocantinas* de Célio Pedreira.

Após o período determinado para a realização das leituras, ela interrogou quantos e quais haviam cumprido a tarefa. Sabendo que os alunos leram pelo menos uma das obras, o resultado está representado na tabela abaixo.

Obras lidas	Número de alunos
I	27
II	28
III	25
I e II	20
I e III	18
II e III	19
I, II e III	15

Qual o número de alunos dessa turma?

2. CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

O conjunto dos números naturais, representado simbolicamente por $\mathbb{N}$, caracteriza-se pelo trabalho com os números na sua forma mais simples, natural. Podemos representá-lo da seguinte forma:
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

Observações:
- O menor número natural é o zero;
- É um conjunto infinito, o que significa que todo número natural possui um sucessor;
- Todo número natural possui um antecessor, com exceção do zero;
Exemplo:

$$57 \rightarrow \begin{cases} antecessor: 56\ (57-1) \\ sucessor: 58\ (57+1) \end{cases}$$

- A soma ou produto de dois números naturais é sempre um número natural.

Dentro do conjunto dos números naturais é possível realizar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Porém, nem sempre é possível efetuarmos a subtração e divisão.
Exemplo: 6 – 10 não resulta em um número natural;
3 ÷ 4 não resulta em um número natural.
Atenção: Para representar a multiplicação, utilizaremos os seguintes símbolos: ‘x’, ‘.’ ou ‘*’

Veja alguns subconjuntos do conjunto dos números naturais:
Conjunto dos números naturais pares: A = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...}
Conjunto dos números naturais ímpares: B = {1, 3, 5, 7, 9, 11, ...}
Conjunto dos números naturais primos: C = {2, 3, 5, 7, 11, 13, ...}.
Abordaremos este último no próximo tópico.

Aplicações:

1. Saindo de Araguatins – TO até um determinado local em Araguaína – TO a distância é de aproximadamente de 240 km. João pretende fazer este percurso utilizando sua bicicleta. Realizando os cálculos para se saber em quantos dias faria

este percurso, constatou que, percorrendo a uma velocidade média de 15 km/h durante 4 horas por dia, consegue completar o trajeto em:
(a) 2 dias (b) 3 dias (c) 4 dias (d) 5 dias (e) 6 dias

Resolução:
Primeiro vamos calcular quantos quilômetros ele percorre em um dia:
15 km por hora durante 4 horas por dia = 15 x 4 = 60 km por dia.
Como o percurso total é de 240 km, temos: 240 : 60 = 4.
Resposta: 4 dias.

2. Responda:
a) Quantos são os números naturais de três algarismos?

Resolução:
Os algarismos são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.
Número de três algarismos são compostos por: algarismo das centenas, algarismo das dezenas e algarismo das unidades (exemplo: 234, 157, 961, ...).
Atenção: não se inicia a formação de um número com zero (exemplo: 035 = 35, ou seja, tem apenas dois algarismos).
Assim,
Para o algarismo das centenas (C) temos 9 opções de números (excluindo o zero).
Para o algarismo das dezenas (D) temos 10 opções.
Para o algarismo das unidades (U) temos 10 opções.

C	D	U

9 x 10 x 10 = 900 números.

b) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 quantas senhas distintas de 4 dígitos diferentes podem ser formadas?

Resolução:
Neste caso não pode haver repetição de algarismos.
Então, temos 9 opções de escolha para o primeiro dígito. Feito esta escolha, restam 8 opções de algarismos para o segundo dígito, 7 opções para escolha do terceiro dígito e apenas 6 opções de escolha para o quarto dígito, ou seja:

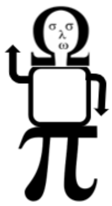
1° dígito	2° dígito	3° dígito	4° dígito

9 x 8 x 7 x 6 = 3.024 senhas

2.1 Múltiplos e divisores

Múltiplos de um número natural
Sendo a, b e c números naturais e **a x b = c**, diz-se que c é múltiplo de a e b.
Exemplo:
M(3) = {0, 3, 6, 9, ...}
M(5) = {0, 5, 10, 15, ...}
M(8) = {0, 8, 16, 24, 32, ...}

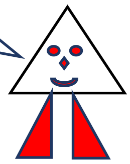
Fique atento:
- O zero é múltiplo de todos os números.
- Todo número é múltiplo de si mesmo.
- Os números da forma 2k, $k \in \mathbb{N}$, são números múltiplos de 2. São chamados de números pares.
- Os números da forma 2k + 1, $k \in \mathbb{N}$, são números ímpares.



Divisores de um número natural
Sendo a, b e c números naturais e **a x b = c**, diz-se que a e b são divisores c.

Exemplo:
D(18) = {1, 2, 3, 6, 9, 18}
D(45) = {1, 3, 5, 9, 15, 45}
D(23) = {1, 23}

Atenção:
- O menor divisor de um número é 1.
- O maior divisor de um número é ele próprio.



Veja na tabela abaixo alguns critérios de divisibilidade:

Um número é divisível por:	
2	Quando o último algarismo for par. Exemplo: 26, 672, 9854
3	Quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos for divisível por 3. Exemplo:138, 1+3+8=12, 1+2=3, logo, 138 é divisível por 3.
4	Quando o número formado pelos dois últimos algarismos for divisível por 4 ou quando o número terminar em 00. Exemplo: 1372, 5100.
5	Quando o último algarismo é 0 ou 5. Exemplo: 35, 1695, 7860
6	Quando for simultaneamente divisível por 2 e 3. Exemplo: 936, 2484, 9150
7	Um número é divisível por 7 se o dobro do seu último algarismo subtraído do número sem o último algarismo, resulta em um número divisível por 7. Se a diferença ainda é grande, repetimos o processo até verificar a divisão por 7. Exemplo: 2744 Excluindo o último algarismo fica 274. O dobro do último algarismo excluído é 2*4 = 8 Assim, 274 – 8 = 266. Repetindo o processo, 26 – 12 = 14. Como 14 é divisível por 7, então, 2744 é divisível por 7.
8	Quando o número formado pelos três últimos algarismos for divisível por 8 ou forem três zeros. Exemplo: 5184, 70536, 93000
9	Quando a soma dos seus algarismos for um número divisível por 9. Exemplo: 864, 3015, 87237
10	Quando termina em zero. Exemplo: 50, 4020, 76310

2.2 Números primos

Um número k é denominado número primo se apresentar apenas dois divisores, 1 e k.
Exemplos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...
Quando um número não é classificado como primo dizemos que ele é composto, exceto os números 0 e 1 que não são classificados nem como primos nem como compostos.

Sugestão de estudo:
Faça uma pesquisa sobre o Crivo de Eratóstenes, um método simples e prático para encontrar números primos.

Decomposição de um número natural em fatores primos

Todo número natural não primo maior que 1 pode ser escrito na forma de produto em que todos os fatores são números primos, chamada forma fatorada completa.

Para chegar à forma fatorada completa de um número natural, basta seguir os seguintes passos:
• dividir inicialmente o número dado por seu menor divisor primo;
• dividir o quociente obtido por seu menor divisor primo;
• repetir esse procedimento até obter o quociente 1.

Exemplos:

18	2
9	3
3	3
1	

$18 = 2.3.3 = 2.3^2$

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$45 = 2.2.2.2.3 = 2^4.3$

125	5
25	5
5	5
1	

$125 = 5.5.5 = 5^3$

2100	2
1050	2
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

$2100 = 2^2.3.5^2.7$

2.3 Mínimo múltiplo comum (MMC)

Denomina-se mínimo múltiplo comum (MMC) de dois ou mais números naturais o número k, tal que k seja o menor número divisível pelos números em questão.

Exemplo: Calcular o MMC dos números 12, 18, 30.

1°) Escrevemos a forma fatorada desses números: $\begin{cases} 12 = 2^2.3 \\ 18 = 2.3^2 \\ 30 = 2.3.5 \end{cases}$

2°) Para o MMC selecionamos os fatores distintos de maior expoente:
MMC (12, 18 e 30) = $2^2.3^2.5 = 180$.

Outra forma de se calcular o MMC é através da divisão simultânea com fatores primos:

12	18	30	2	→ Menor número primo divisor de 12, 18 ou 30
6	9	15	2	→ Menor número primo divisor de 6, 9 ou 15
3	9	15	3	→ Menor número primo divisor de 3, 9 ou 15
1	3	5	3	→ Menor número primo divisor de 3 ou 5
1	1	5	5	
1	1	1		

MMC (12, 18 e 30) = 2.2.3.3.5 = 180

2.4 Máximo divisor comum (MDC)

Denomina-se máximo divisor comum (MDC) de dois ou mais números o maior dos seus divisores comuns.

Exemplo: Vamos calcular o MDC dos números 180, 720 e 504.

1°) Fatoramos todos os números.

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$180 = 2^2.3^2.5$

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$504 = 2^3.3^2.7$

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$720 = 2^4.3^2.5$

2°) Pegamos os fatores comuns a 180, 504 e 720. Lembre-se: $2^3 = 2.2^2$ e $2^4 = 2^2.2^2$.

MDC (180, 504 e 720) = $2^2.3^2 = 36$

Podemos calcular o MDC através da divisão simultânea com fatores primos.

180	504	720	2	← divisor comum aos três
90	252	360	2	← divisor comum aos três
45	126	180	2	
45	63	90	2	
45	63	45	3	← divisor comum aos três
15	21	15	3	← divisor comum aos três
5	7	5	5	
1	7	1	7	
1	1	1		

MDC(180, 504 e 720) = 2.2.3.3 = 36

Aplicações:

1. Um sistema envia mensagens a três setores distintos de forma constante. Para o setor A, de 6 em 6 horas, ao setor B, de 8 em 8 horas e ao setor C, de 9 em 9 horas. Sabendo que as mensagens a esses três setores coincidiram às 8 horas de terça-feira, quando coincidirão novamente?

Resolução:

Calculamos o Mínimo múltiplo comum entre 6, 8 e 9:

6	8	9	2
3	4	9	2
3	2	9	2
3	1	9	3
1	1	3	3
1	1	1	

MMC(6, 8 e 9) = $2^3.3^2$ = 72

O MMC (6, 8 e 9) =72, indica que as mensagens voltarão a coincidir daqui a 72 horas, ou seja, daqui a exatamente 3 dias.

Resposta: Às 8 horas de sexta-feira.

2. Três tábuas medindo respectivamente 48 cm, 84 cm e 180 cm serão cortadas em pedaços iguais do maior tamanho possível. Quanto deverá medir cada pedaço de tábua?

Resolução:
Vamos calcular o MDC de 48, 84 e 180.

48	84	180	2	←
24	42	90	2	←
12	21	45	2	
6	21	45	2	
3	21	45	3	←
1	7	15	3	
1	7	5	5	
1	7	1	7	
1	1	1		

MDC(48, 84 e 180) = 2.2.3 = 12

Neste caso, como o maior número que divide 48, 84 e 180 ao mesmo tempo é 12, então, a resposta é 12 cm.

Reflexão do autor:
Saber identificar e operacionalizar com os números naturais é fundamental para o desenvolvimento do cálculo aritmético, não somente porque esses representam a porta de entrada para os estudos dos demais conjuntos numéricos, mas também por sua utilidade prática na vida cotidiana. As representações e leituras numéricas fazem parte do sistema organizacional da sociedade, seja na marcação de ruas, quadras, lotes e casas, ou no temporizador de semáforos, números telefônicos, senhas, contagem e quantificações em geral, enfim, saber manipular e lidar com os números é um passo importante para a interpretação e intervenção da realidade, abrindo caminhos para novas aprendizagens e avanços cognitivos.

ATIVIDADES II

7. Descubra o número:
a) Sou o menor número natural par de três algarismos e meu antecessor é o maior número natural ímpar de dois algarismos. Quem é meu sucessor?

b) Sou a metade do sucessor do número obtido pela diferença entre o maior e o menor número natural formados com três algarismos distintos. Quem sou eu?

8. Toda quarta-feira, na cidade de Araguatins – TO, acontece a realização da feira livre. Uma oportunidade comercial para produtores e agricultores da região. Lá se encontra hortaliças, frutas, artesanatos, bolos, etc. Um morador chegando no local, dirigiu-se a uma barraca de doces, na qual os preços variavam conforme o tamanho. Sendo assim, este morador comprou dois de R$ 6,00 cada, três de R$ 5,00 cada e sete de R$ 2,00 cada. Como só havia levado R$ 100,00 e ainda precisa levar um frango caipira no valor de R$ 42,00, uma abóbora ao preço de R$ 7,00 e um queijo de R$ 9,00, o morador conclui que:

(a) O dinheiro era suficiente e ainda sobraria R$ 3,00
(b) O dinheiro era suficiente e ainda sobraria R$ 1,00
(c) O dinheiro era exatamente o valor da compra.
(d) O dinheiro era insuficiente, pois faltaria R$ 5,00.
(e) O dinheiro era insuficiente, pois faltaria R$ 2,00.

9. O código de acesso de um cofre é uma sequência numérica de 4 dígitos distintos, formados a partir dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.
a) Quantas códigos distintos podem ser formados?
b) Quantos são os códigos que podem ser formados, com o primeiro dígito sendo um número (algarismo) ímpar e o último um número (algarismo) par?

10. Um ciclista dá uma volta em uma pista de corrida em 16 segundos e outro ciclista em 20 segundos. Se os dois ciclistas partirem juntos, após quanto tempo irão se encontrar de novo no ponto de partida, levando em consideração ambas as velocidades constantes?

11. Na cidade de Araguaína – TO, uma empresa possui três terrenos de formato retangular cujas medidas de frente são, respectivamente, 120 m, 150 m e 180 m. A empresa pretende fazer marcações na frente desses terrenos de tal forma que elas tenham o mesmo tamanho e seja o maior possível. De quantos metros serão essas marcações?

12. (PUC-SP) Um lojista dispõe de três peças de um mesmo tecido, cujos comprimentos são 48 m, 60 m e 80 m. Nas três peças o tecido tem a mesma largura. Ele deseja vender o tecido em retalhos iguais, cada um tendo a largura das peças e o maior comprimento possível, de modo a utilizar todo o tecido das peças. Quantos retalhos ele deverá obter?

13. Localizada em Palmas -TO, com 571 mil metros quadrados, a Praça dos Girassóis é a maior da América latina e a segunda maior praça urbana do mundo. A praça é um complexo arquitetônico que reúne as sedes dos três poderes públicos estaduais: o Palácio Araguaia (Poder Executivo), a Assembleia Legislativa do Estado do Tocantins (Poder Legislativo) e o Tribunal de Justiça do Estado do Tocantins (Poder Judiciário), além das Secretarias de Governo. (Fonte: turismo.to.gov.br). Suponhamos que três pessoas A, B e C consigam dar uma volta completa em torno dessa praça em 30, 45 e 60 minutos respectivamente. Partindo de um mesmo local e ao mesmo instante, em quanto tempo eles se encontrariam novamente no ponto de partida?

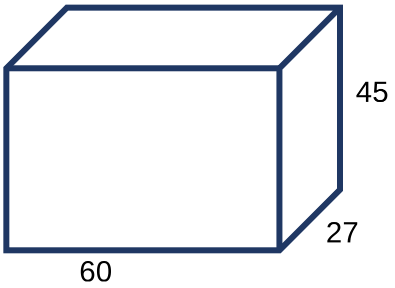
14. Dois ou mais números que têm o máximo divisor comum igual a 1 são chamados de números primos entre si. Verifique em cada caso, se os números são primos entre si. Justifique sua resposta.
a) 25 e 30
b) 40 e 21
c) 7 e 11
d) 28 e 3

15. Alexandre é o irmão mais velho de Regina e Guilherme. Regina tem 13 anos e Guilherme 10 anos. As idades dos três irmãos são números primos entre si. Determine a idade de Alexandre, sabendo que ela é um número múltiplo de 7 e menor que 25.

16. Na cidade de Palmas – TO, uma empresa tem ônibus a cada 3 horas, outra a cada 4 horas e ainda outra a cada 6 horas. Na segunda-feira às 7 horas da manhã, os ônibus dessas três empresas partiram juntos. Que horas isso ocorrerá novamente?

17. Um marceneiro deseja cortar um paralelepípedo de madeira maciça cujas medidas estão indicadas na figura, dividindo-o em vários cubos de medidas iguais de aresta. Qual é a maior medida da aresta que estes cubos podem ter e quantos serão estes cubos?

Dica: volume do paralelepípedo = comprimento x largura x altura; volume do cubo = (aresta)^3.



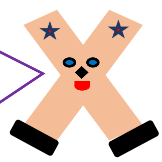
3. CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

O conjunto dos números inteiros pode ser entendido como uma ampliação ao conjunto dos números naturais, especialmente, pelos estudos relacionados aos números inteiros negativos. O trato com esses números é muito comum na vida cotidiana e, apesar de muitas das vezes parecerem não ter sentido, eles podem traduzir ideias ou situações que auxiliam na compreensão ou atuação na realidade.

Por exemplo, uma pessoa está com seu saldo zerado no banco e mesmo assim, realiza um saque de R$ 50,00. Isso significa que ela possuía um limite, uma espécie de empréstimo disponibilizado pelos bancos aos clientes. Nesse caso, ao sacar esse valor, esta pessoa fica com um saldo negativo em 50 reais, ou seja, - R$ 50,00; valor que representa sua dívida com o banco.

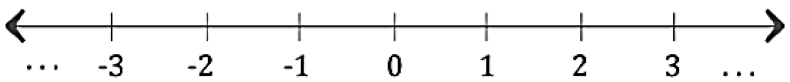
Atenção!

As taxas de juros desses limites costumam ser bem elevadas, uma das maiores do mercado financeiro. É bom evitá-los!



Simbolicamente, podemos representar o conjunto dos números inteiros da seguinte forma: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots\}$.

Veja como fica a representação do conjunto na reta numérica:



Fonte: *Google imagens*

O zero representa a origem.
Nos dois sentidos a reta tende ao infinito. Logo, o conjunto $\mathbb{Z}$ é infinito.

Todo número inteiro, com exceção do zero, possui um simétrico (ou oposto) em relação a origem, ou seja, números equidistantes do zero.

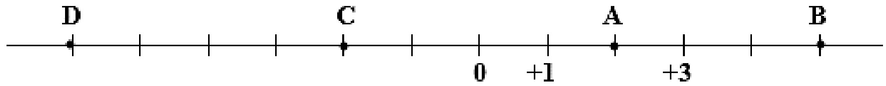
Exemplo: o simétrico de 2 é -2, o simétrico de -11 é 11. O simétrico do zero é o próprio zero.

De outra forma, podemos dizer que dois números são simétricos ou opostos quando têm o mesmo módulo, porque estão à mesma distância do zero.

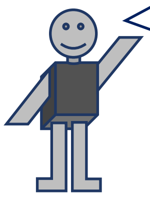
Módulo é o valor absoluto de um número e representamos por duas barras verticais.

Exemplo:
|-5| = 5 (Lê-se: módulo de – 5 é igual a 5).
|5| = 5 (Lê-se: módulo de 5 é igual a 5).
Assim, dizemos que -5 e 5 são simétricos ou opostos.

Exemplo: Veja a imagem abaixo. Vamos determinar a distância entre os pontos C e D e, A e D.



Fonte: *Google imagens*



Fazendo uma contagem simples na reta, cujo espaçamento entre dois traços consecutivos é igual a 1, observamos que o ponto A está em +2, o ponto B em +5, o ponto C em - 2 e o ponto D em – 6.
→ Quando dois números estão no mesmo sentido da reta a distância entre eles é dada pela diferença entre os módulos do mais distante de zero pelo mais próximo de zero. Assim, temos: Distância CD = Distância DC = |-6| - |-2| = 6 – 2 = 4.
→ Quando dois números estão em sentidos opostos da reta a distância entre eles é dada pela adição de seus módulos: Assim, temos: Distância AD = Distância DA = |-6| + |+2| = 6 + 2 = 8.

3.1 Comparação entre números inteiros

- Quando dois números têm o mesmo sinal positivo, o maior é aquele de maior módulo. Exemplo: $+7 > +2$.
- Quando dois números têm sinais opostos, o maior é sempre o positivo.
Exemplo: $+1 > -10$
- Quando dois números têm o mesmo sinal negativo, o maior é aquele de menor módulo.
Exemplo: $-3 > -8$
Para entender melhor: Imagine que você tenha 15 laranjas. Se retirar 3 ficam 12. Enquanto que se retirar 8 ficam 7. Observe que a parte que sobra de -3 (12) é maior do que a parte que sobra de -8 (7). Logo, $-3 > -8$.

3.2 Operações com números inteiros

A soma, subtração e multiplicação de números inteiros resulta em um número inteiro. Já na divisão, nem sempre. Por exemplo, quando dividimos 2 por 5 o resultado não dá um número inteiro.

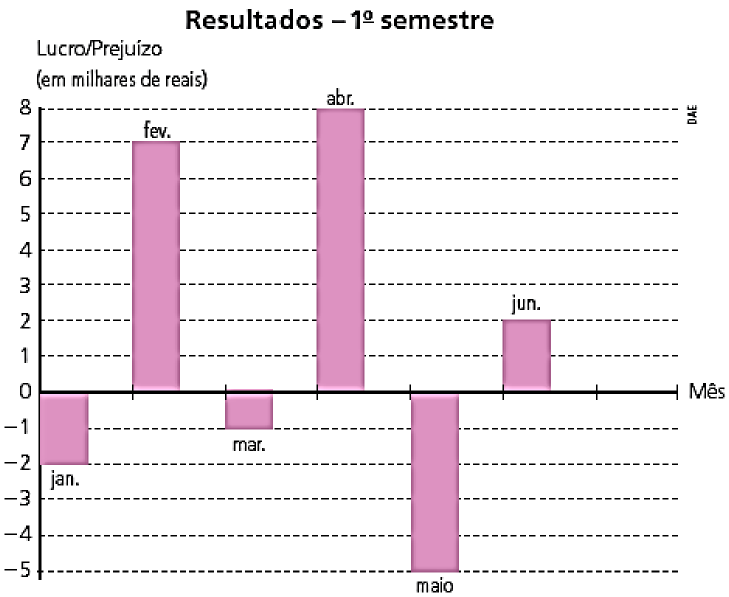
- Adição e subtração
Veja, de forma prática, algumas dicas que podem facilitar a soma e subtração com números inteiros:
I) se o número for positivo podemos escrevê-lo sem o sinal de '+'. Exemplo: + 9 = 9.

II) Quando houver parênteses na operação, para retirá-lo, basta verificar o sinal que o antecede.
Se for um '+', elimine-o, retire os parênteses e mantenha o sinal do número.
Exemplo: $7 + (+3) = 7 + 3$ ou $7 + (-3) = 7 - 3$.
Se for um '-', elimine-o, retire os parênteses e use o oposto do número.
Exemplo: $7 - (+3) = 7 - 3$ ou $7 - (-3) = 7 + 3$.

III) Para efetuar o cálculo entre dois números inteiros que possuem os mesmos sinais, mantenha esse sinal e some seus valores absolutos.
Exemplo: $+7 + 3 = +10$ e $-7 - 3 = -10$.
Caso os sinais sejam diferentes, considere o sinal do número de maior módulo e subtraia seus valores absolutos.
Exemplo: $-7 + 3 = -4$ e $-3 + 7 = +4$

Aplicações:

1. (ANDRINI-2012) O dono de uma microempresa montou uma tabela e representou em um gráfico de barras seus resultados no primeiro semestre do ano. Os números positivos indicam lucros e os negativos, prejuízos. A empresa acumulou lucro ou prejuízo nesse semestre? De quanto?



Mês	Lucro/Prejuízo (em milhares de reais)
Janeiro	–2
Fevereiro	7
Março	–1
Abril	8
Maio	–5
Junho	2

Resolução: Observe os valores correspondentes a cada mês, representados na tabela.
Soma dos números negativos: $-2 + (-1) + (-5) = -2 - 1 - 5 = -8$.
Soma dos números positivos: $7 + 8 + 2 = 17$.
Para saber o saldo da empresa ao fim desse período basta somarmos os resultados, ou seja, $-8 + 17 = 9$. Logo, a empresa teve lucro de R$ 9.000,00.

- Multiplicação e divisão
Para a realização de cálculos envolvendo a multiplicação ou divisão de dois números inteiros, vale a seguinte regra de sinais:

Na multiplicação	Na divisão
(+) . (+) = +	(+) : (+) = +

(+) . (-) = -	**(+) : (-) = -**
(-) . (+) = -	**(-) : (+) = -**
(-) . (-) = +	**(-) : (-) = +**

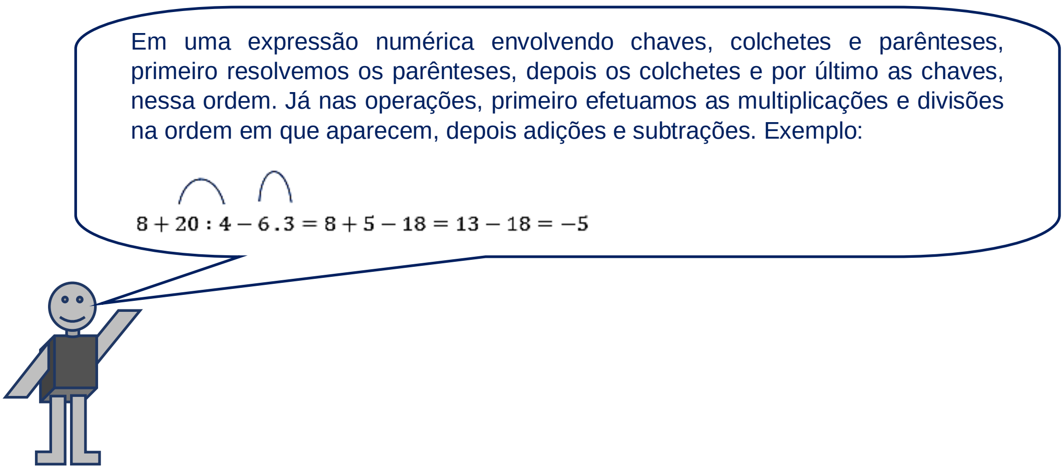
Exemplo:
a) $(-2).(-7) = 14$
b) $(-3).(+6) = -18$
c) $4.(-5) = -20$
d) $(-51) : (-3) = 17$
e) $42 : (-7) = -6$
f) $-90 : 10 = -9$

Aplicações:

1. No início do mês, o saldo da conta de um cliente era R$ 520,00. Durante esse mês ele fez as seguintes movimentações financeiras:
3 saques de R$ 60,00;
2 depósitos de R$ 200,00;
4 pagamentos de R$ 150,00;
2 transferências de R$ 100,00.
Escreva uma expressão que represente essa situação e determine o saldo dessa conta no final desse mês.

Resolução:
A expressão poderia ser: $520 - 3.(60) + 2.(200) - 4.(150) - 2.(100)$.
Resolvendo temos: $520 - 180 + 400 - 600 - 200$
Somando separadamente os positivos e os negativos obtemos: $920 - 980 = -60$.
Resposta: A conta ficará com um saldo negativo de R$ 60,00.

2. (GIOVANNI JÚNIOR-2018) Sabendo que $x = (-16):[(-4):(-4)]$ e $y = [(-16):(-4)]:(-4)$ e usando os sinais $=$ ou $\neq$, compare os números x e y.



Resolução: Vamos determinar os valores de x e y.

$$x = (-16):[(-4):(-4)] = (-16):[1] = -16$$

$$y = [(-16):(-4)]:(-4) = [4]:(-4) = -1$$

Resposta: Como $x = -16$ e $y = -1$, logo, $x \neq y$.

- Potenciação
A potenciação é uma multiplicação de fatores iguais: Dado um número inteiro **a** e um número natural **n**, temos que:

$$\underbrace{a}_{\text{base}}{}^{\overbrace{n}^{\text{expoente}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Exemplo: $3^4 = 3\,.\,3\,.\,3\,.\,3 = 81$ ou $(-5)^3 = (-5).(-5).(-5) = -125$

$$Expoente\ par \begin{cases} base\ positiva = o\ resultado\ da\ potência\ é\ um\ número\ positivo \\ base\ negativa = o\ resultado\ da\ potência\ é\ um\ número\ positivo \end{cases}$$

Exemplo: $8^2 = 8.8 = 64$ e $(-2)^4 = (-2).(-2).(-2).(-2) = 16$

Atenção quanto da existência ou não de parênteses:

Exemplo: $(-3)^2 = 9$, porém, $-3^2 = -9$

$$Expoente\ ímpar \begin{cases} base\ positiva = o\ resultado\ da\ potência\ é\ um\ número\ positivo \\ base\ negativa = o\ resultado\ da\ potência\ é\ um\ número\ negativo \end{cases}$$

Exemplo: $3^3 = 3\,.\,3\,.\,3 = 27$ e $(-2)^3 = (-2).(-2).(-2) = -8$

Seja **n** um número natural e **a** um número inteiro:

$1^n = 1$

$0^n = 0 \quad (n \neq 0)$

$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

Exemplo:

$1^{10} = 1;\quad (-1)^{100} = 1;\quad (-1)^3 = -1$

$0^7 = 0;\quad 0^{200} = 0$

$5^0 = 1;\quad (-10)^0 = 1;\quad -10^0 = -1$

Reflexão do autor:
O estudo do conjunto dos números inteiros é uma oportunidade de obter respostas que antes era inviável com os números naturais, por exemplo, como retirar 5 de 2? (2 – 5). A habilidade com os números inteiros passa muito pela compreensão dos números negativos, uma vez que esses representam a principal diferença com os números naturais já estudados. A aprendizagem dos números inteiros facilita a inserção e articulação na vida em sociedade e, em especial, no campo do trabalho. Afinal, os números inteiros estão presentes nas mais diversas circunstâncias, como em planilhas de anotações da quantidade de produtos comprados, vendidos e em estoque de uma empresa, ou nas observações das marcações de temperaturas em várias cidades, indo de situações esportivas, como o saldo de gols de uma equipe em um campeonato, ao controle do número de pacientes por vagas em um hospital. Já que convivemos e lidamos o tempo todo com esses números, a melhor forma de se comunicar, interagir e manipulá-los é aprendendo como eles funcionam.

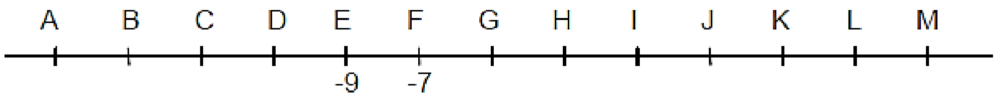
ATIVIDADES III

18. (ENCCEJA 2018) O diretor de uma escola observou o número de meninos e de meninas matriculados nos anos de 2011, 2012 e 2013, com o intuito de prever a variação na quantidade de alunos dos sexos feminino e masculino que serão matriculados em 2014. O quadro apresenta os dados observados nos anos citados.

Anos	Número de meninas matriculadas	Número de meninos matriculados
2011	400	520
2012	450	500
2013	500	480

Com os dados obtidos, o diretor observou um padrão de crescimento no número de meninas e um padrão de decrescimento no número de meninos nesses anos e considerou que esses padrões seriam mantidos para 2014.
Mantidos esses padrões, quantas meninas haverá a mais do que meninos dentre os alunos matriculados nessa escola em 2014?

19. (INEP/SAEB) A figura a seguir é uma representação da localização das principais cidades ao longo de uma estrada, onde está indicada por letras a posição dessas cidades e por números as temperaturas registradas em °C.



Com base na figura e mantendo-se a variação de temperatura entre as cidades, o ponto correspondente a 0 °C estará localizado:
(A) sobre o ponto M.
(B) entre os pontos L e M.
(C) entre os pontos I e J.
(D) sobre o ponto J.

20. (ENCCEJA 2019) Um casal com dois filhos fez um levantamento sobre os valores cobrados pelos dois planos de saúde disponíveis em sua cidade. O valor mensal a ser cobrado em cada plano é definido somando-se os valores de referência para todos os membros da família que serão cadastrados. O resultado desse levantamento, considerados os mesmos tipos de cobertura nos dois planos, está listado no quadro, que apresenta os valores mensais de referência.

Valor pago	Idade (ano)	Valores de referência	
		Plano I	Plano II
Pelo titular	Até 25	R$ 280,00	R$ 290,00
	Entre 25 e 50	R$ 420,00	R$ 450,00
	50 ou mais	R$ 480,00	R$ 500,00
Por dependente	Até 25	R$ 300,00	R$ 300,00
	Entre 25 e 50	R$ 400,00	R$ 360,00
	50 ou mais	R$ 490,00	R$ 500,00

As idades dos membros dessa família são:

Membro	Idade (ano)
Pai	51
Mãe	47
Filho	26
Filha	22

A opção que terá a menor mensalidade para essa família nos próximos dois anos é o plano
(A) I, com o pai como titular.
(B) I, com a mãe como titular.
(C) II, com o pai como titular.
(D) II, com a mãe como titular.

21. (ENCCEJA 2019) Durante uma viagem, Pedro, João e Carlos gastaram juntos R$ 450,00. João gastou R$ 30,00 a mais que Pedro e Carlos gastou R$ 60,00 a mais que João. Nessa viagem, quanto João gastou?

22. Determine e analise os resultados das seguintes expressões:
$x = 4.(-20) - (-120):(+2) + 28:(-7)$
$y = 7.(-2)^2 - 5.(-2)^3 - 10^2$
$z = \sqrt{81}:(4^2 - 5^2)$
Podemos concluir que:
(A) $x < z < y$
(B) $x < y < z$
(C) $z < y < x$
(D) $y < x < z$
23. (Cesgranrio-RJ) A tabela abaixo apresenta os fusos horários de algumas cidades do mundo, em relação a Brasília, em fevereiro de 2010.

Cidade	Hora em relação a Brasília
Amsterdã	+4
Bogotá	−2
Cidade do México	−3
Dubai	+7
Johannesburgo	+5
Lisboa	+3
Madri	+4
Moscou	+6
Nova York	−2

Quando forem 16 horas em Dubai, que horas serão em Nova York?

24. (GIOVANNI JÚNIOR-2018) Rodrigo escreveu uma operação em cada cartão.

$-5+9$	$(-2)\cdot(+3)$	$(-1)^8$	$-10+1$
$(+20):(+4)$	$-6-6$	$(-6)\cdot(-6)$	$(-6)^2$
$(-6):(-6)$	$(+7)\cdot(+2)$	$(-2)^5$	$-11+4$
$(-4)\cdot(-10)$	$(-1)^3$	$(-10):(+2)$	$+9+6$

Se ele tirar, ao acaso, um cartão da caixa, qual será a maior chance: sair um cartão cujo resultado da operação é um número inteiro positivo ou um número inteiro negativo? Justifique.

25. (OBMEP-Portal da Matemática/Adaptado) Uma calculadora possui, além dos dez dígitos do nosso sistema decimal, quatro botões: ☼, que triplica o número no visor; ֍ que eleva ao quadrado o número do visor; ʘ, que divide por dois o número do visor, caso o número seja par (positivo ou negativo), mas se for ímpar, nada acontece; φ, que soma sete do número do visor; e ¶, que faz tocar uma música. Se, inicialmente, o número do visor é -3, apertando a sequência ☼ ☼ φ ʘ ֍, que número obteremos?

4. CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

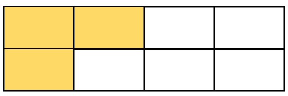
Os números racionais estão presentes em nossa vida. Algumas expressões como “meio quilo de carne”, “adicional de um terço do salário no gozo das férias”, “a altura dele é 1,75 metros”, “duas xícaras e meia de açúcar”, “três quartos da renda de uma família são gastos com aluguel”, “o preço do litro da gasolina subiu R$ 0,21”, “a chance de você ganhar na Mega-Sena com um jogo normal de seis números é de uma em 50.063.860”, são exemplos de situações que podem ser representadas com números racionais.

O conjunto dos números racionais, representado simbolicamente por ‘$\mathbb{Q}$’, é formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração. Nesse caso, fazem parte desse conjunto, os números naturais e os números inteiros, além dos números decimais finitos e as dízimas periódicas.
Podemos definir o conjunto dos racionais da seguinte forma:
$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}\ , com\ a, b \in \mathbb{Z}\ e\ b \neq 0\right\}$.

São exemplos de números racionais: 5; 0; -10; 1,24; $\sqrt{0{,}09}$; $-\frac{2}{3}$; 0,00125; 1,3333...

4.1 Frações

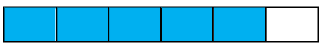
Uma fração indica em quantas partes iguais o inteiro foi dividido e quantas dessas partes foram tomadas.



$$\begin{cases} Total\ de\ partes\ iguais: 8 \\ Partes\ tomadas: 3 \\ Fração\ que\ representa\ a\ parte\ tomada: \frac{3}{8}\ \frac{numerador}{denominador} \\ Leitura: três\ oitavos \end{cases}$$

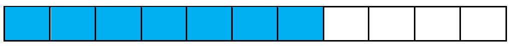
Exemplos:

a)



$\frac{5}{6}$ (cinco sextos)

b)



$\frac{7}{11}$ (sete onze avos)

Aplicações:

1. Uma empresa possui 120 funcionários, dos quais $\frac{1}{4}$ são homens. Para participar de um curso de aperfeiçoamento profissional, serão selecionados $\frac{2}{5}$ dos homens e $\frac{1}{5}$ das mulheres. Em relação a quantidade de funcionários que farão essa capacitação, podemos dizer que o número de homens é igual ao número de mulheres? Justifique.

Resolução: Vamos descobrir o número de homens e de mulheres.
Dividindo 120 em 4 partes iguais e tomando uma delas, encontramos a quantidade de homens (120 : 4 = 30).

30	30	30	30

Logo são 30 homens e 120 – 30 = 90 mulheres.

Para calcularmos $\frac{2}{5}$ dos homens, dividimos os 30 homens em 5 partes iguais (30 : 5 = 6) e tomamos duas dessas partes.

6	6	6	6	6

6 + 6 = 12 homens.

Agora, vamos calcular $\frac{1}{5}$ das mulheres: Dividimos 90 em 5 partes iguais (90 : 5 = 18) e tomamos uma dessas partes.

18	18	18	18	18

18 mulheres.

Resposta: Não. Pois, serão seis mulheres a mais que homens (18 – 12 = 6).

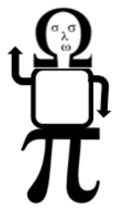
2. Sabendo que a renda de uma família é de R$ 1.320,00, e que $\frac{2}{3}$ desse valor são gastos com alimentação, quanto sobra para as outras despesas?

Resolução:
De forma prática podemos fazer:
1320 : 3 = 440
440 x 2 = 880
1320 – 880 = 440
Resposta: R$ 440,00.

$\frac{2}{3}$ de 1320 = $\frac{2}{3} \cdot 1320 = \frac{2640}{3} = 880$

1320 – 880 = 440

Resposta: R$ 440,00



Representação
As frações podem representar números inteiros, decimais finitos e dízimas periódicas, neste caso, basta dividir o numerador pelo denominador:

a) 10/2 = $\frac{10}{2} = 10 : 2 = 5$

b) 4/5 = $\frac{4}{5}$ = 4 : 5 = 0,8

c) 3/11 = $\frac{3}{11} = 0{,}272727$ ...

Frações equivalentes: são frações que representam o mesmo valor. Podem ser obtidas multiplicando ou dividindo o numerador e denominador de uma fração pelo mesmo número.

Exemplos:

a) $\frac{4}{7}$ e $\frac{12}{21}$ são frações equivalentes, pois, $\frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{12}{21}$

b) $\frac{8}{20}$ e $\frac{2}{5}$ são frações equivalentes, pois, $\frac{8 : 4}{20 : 4} = \frac{2}{5}$

Para escrever uma fração na sua forma irredutível, dividimos o numerador e o denominar pelo o máximo divisor comum entre eles.

Exemplo: Na fração $\frac{48}{72}$, temos que MDC(48, 72) = 24. Logo, podemos simplificar 48 e 72 por 24.
Assim, $\frac{48}{72} = \frac{48 : 24}{72 : 24} = \frac{2}{3}$ (fração irredutível)

Uma fração $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ estará na forma irredutível, quando MDC(a, b) = 1. Nesse caso dizemos que a e b são primos entre si.
Exemplos: $\frac{10}{13}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{1}{2}$

Escrevendo números decimais finitos na forma de fração:
Para escrever um número decimal finito em fração basta seguir a seguinte regra:
Uma casa decimal = denominador 10
Duas casas decimais = denominar 100
Três casa decimais = denominador 1.000
E assim por diante, acrescentando um zero para cada casa decimal.

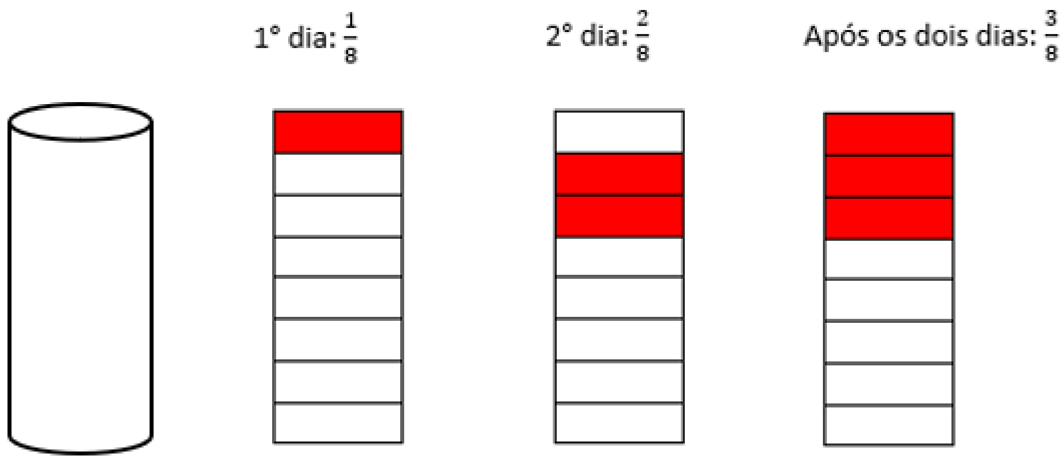
Exemplos: $1{,}7 = \frac{17}{10}$; $0{,}25 = \frac{25}{100}$; $0{,}003 = \frac{3}{1.000}$; $6{,}00125 = \frac{600125}{100.000}$

4.1.1 Operações com frações

Adição e subtração

Problema: Em uma fazenda na região do “Bico do Papagaio” (no Tocantins), um tanque no formato de cilindro circular reto é utilizado para armazenamento de água. Ele possui capacidade para 5.000 litros de água e está completamente cheio. Sabendo que em dois dias consecutivos foram utilizados, respectivamente, $\frac{1}{8}$ e $\frac{2}{8}$ do seu volume total, quantos litros de água ainda restam nesse tanque?

Resolução: Vamos montar um esquema para facilitar o entendimento. Dividimos o volume total do tanque em 8 partes iguais e consideramos o consumo em cada dia (veja imagem abaixo).



Observe na última figura que do total foram utilizados $\frac{3}{8}$ e restam $\frac{5}{8}$.

Resposta: Como o tanque tinha, inicialmente, 5.000 litros de água, temos que:
$\frac{5}{8}$ de 5.000 = $\frac{5}{8} * 5.000 = \frac{25.000}{8} = 3.125$ litros de água.

De forma geral, podemos trabalhar com a adição e subtração de frações de dois modos:

i) Denominadores iguais: Mantemos o mesmo denominar e adicionamos ou subtraímos os numeradores.

a) $\frac{1}{7}+\frac{4}{7}=\frac{4+1}{7}=\frac{5}{7}$

b) $\frac{3}{4}-\frac{5}{4}=\frac{3-5}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-\frac{4}{3}=\frac{2+5-4}{3}=\frac{3}{3}=1$

ii) Denominadores diferentes: Podemos utilizar os conhecimentos adquiridos de MMC e MDC.

Exemplo: Vamos calcular $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ de duas maneiras distintas.

1ª) Determinamos o MMC entre os denominadores. Nesse caso, MMC(4, 6) = 12. Depois, pegamos o valor do MMC, e em cada fração, dividimos pelo denominador e o resultado multiplicamos pelo numerador, a fim de obtermos uma fração única, cujo denominador é o próprio MMC. Então, na primeira fração obtemos: $\mathbf{12 : 4 * 1 = 3}$ e na segunda: $\mathbf{12 : 6 * 1 = 2}$. Logo,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3+2}{12}=\frac{5}{12}$$

2ª) De forma prática, podemos utilizar a multiplicação conforme esquema abaixo:

6 4

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{6+4}{24}=\frac{10}{24}=\frac{10:2}{24:2}=\frac{5}{12}$$

24

Note que MDC(10, 24) = 2

Exemplo: Vamos mostrar que $\frac{4}{5}-\frac{7}{2}=-\frac{27}{10}$.

8 35

$$\frac{4}{5}-\frac{7}{2}=\frac{8-35}{10}=-\frac{27}{10}$$

10

Esse método pode ser utilizado também na adição ou subtração entre um número inteiro e uma fração. Veja nos exemplos abaixo:

a) $2+\frac{1}{3}$

$\boxed{2 * 3 = 6}$ $\boxed{6 + 1 = 7}$

$$2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

b) $1-\frac{5}{8}$

$\boxed{8 * 1 = 8}$ $\boxed{8 - 5 = 3}$

$$1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$

Multiplicação:

Para realizarmos uma multiplicação de duas frações, basta multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador.

Exemplos:

a)

$$\frac{2}{5} * \frac{3}{11} = \frac{6}{55}$$

b)

$$\frac{9}{10} * \frac{5}{6} = \frac{45}{60} = \frac{45:15}{60:15} = \frac{3}{4}$$

Divisão:

Para efetuar uma divisão com frações, basta seguir o seguinte método: Considere a, b c e d números inteiros diferentes de zero. Temos que:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{a*d}{b*c}$$

Muda o sinal da divisão para multiplicação e inverte a fração do denominador. Nesse caso, o inverso de $\frac{c}{d}$ é $\frac{d}{c}$.

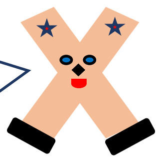
Exemplos:

a) $\frac{2}{5} : \frac{7}{15} = \frac{2}{5} * \frac{15}{7} = \frac{30}{35} = \frac{30:5}{35:5} = \frac{6}{7}$

b) $\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}} = -\frac{2}{3} * \frac{6}{1} = -\frac{12}{3} = -4$

Atenção: O inverso de um número inteiro **a** ($a \neq 0$) é $\frac{1}{a}$.

Assim, $\frac{\frac{2}{5}}{4} = \frac{2}{5} * \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$



Aplicações:

1. Com o falecimento do senhor João, a herança da família, que se restringe a uma fazenda de 17 alqueires, será dividida entre sua esposa que terá direito a metade (1/2) e seus oito filhos, que dividirão igualmente entre eles a outra parte restante. Que fração da fazenda corresponderá a herança que cada um dos filhos terá direito?

Resolução: Cada filho terá direito a 1/8 da metade, ou seja, 1/8 de 1/2.
Neste caso, temos que $\frac{1}{8}$ de $\frac{1}{2} = \frac{1}{8} * \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.
Portanto, cada filho herdeiro ficará com $\frac{1}{16}$ da fazenda, ou ainda, $\frac{1}{16} * 17 = \frac{17}{16} = 1{,}0625$ alqueires.

2. Uma área tem 900 m^2. Nela serão colocados dois tipos de pisos, sendo que, em $\frac{2}{5}$ dessa área, será colocado o piso A e em $\frac{1}{3}$ dela, o piso B. Na área restante, será colocado uma grama específica.

a) Escreva a fração correspondente à área onde serão colocados os pisos?

b) Utilizando a informação do item a, e supondo que cada metro quadrado tanto do piso A, quanto do B, custa R$ 48,00, estime um valor a ser gasto na compra desses pisos.

Resolução:

a) Nesse caso, devemos realizar a soma das partes: $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$$

b) Vamos calcular a área na qual será destinada os pisos: $\frac{11}{15} * 900 = \frac{9900}{15} = 660\ \text{m}^2$.
Como cada m^2 custa R$ 48,00, temos que: 660 * 48 = 31.680.
Resposta: R$ 31.680,00.

Reflexão do autor:

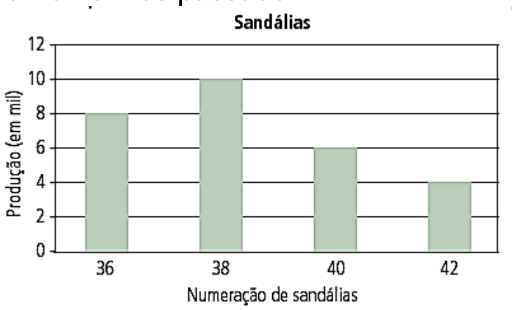
As frações são representações numéricas importantes e muito utilizadas. É comum percebermos sua presença em receitas, anúncios, pesquisas, medições, representações e cálculos. Por exemplo, convivemos com expressões do tipo: ‘1/4 de litro de leite’, 2/5 dos funcionários’, ‘1/10 da renda’, ‘a chance é de uma em um milhão’, ‘1/3 dos hectares’, ‘metade da pizza’, etc. Portanto, o desenvolvimento de habilidades voltadas a leitura, interpretação e cálculos de frações contribui para uma vida com mais sentidos e significados.

ATIVIDADES IV

26. Imagine que você tenha direito a um benefício. Porém, do montante inicial estipulado, apenas 9/10 lhe pertence, devido às taxas tributárias. Desta parte, deverá retirar 1/5 para pagamentos de despesas operacionais. Do restante, você ficaria com a terça parte, tendo em vista que possui dois sócios com os mesmos direitos. Com que fração do benefício você ficaria?

27. Indo à feira livre da cidade de Araguatins – TO, uma dona de casa comprou 1 kg (quilograma) de cebola, $\frac{1}{4}$ kg de pimentão e $\frac{3}{2}$ kg de tomate. Em fração, quantos quilogramas (kg) de hortaliças ela comprou?

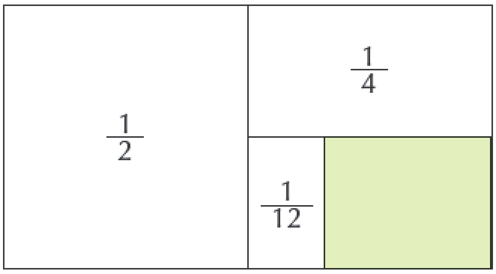
28. (Vunesp) O gráfico a seguir mostra a produção de sandálias de uma empresa do ramo no mês passado.



Analisando o gráfico, conclui-se que do total de sandálias produzidas, as de numeração 36 e 40, juntas, representam:

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{3}{5}$

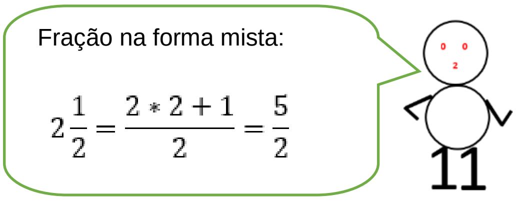
29. (ANDRINI-2012) Um terreno em formato retangular foi dividido em 4 lotes (figura abaixo). A parte sombreada representa que fração do terreno?



30. (ANDRINI-2012) Sheila vai embalar $\frac{3}{4}$ de quilograma de balas em saquinhos com $\frac{1}{8}$ de quilograma. Quantos saquinhos deverá utilizar?

31. (GIOVANNI JÚNIOR-2018) Para fazer um bolo de laranja, usa-se $1\frac{1}{2}$ xícara de chá de açúcar branco. Para fazer $2\frac{1}{2}$ da receita desse bolo, quanto desse ingrediente será necessário?

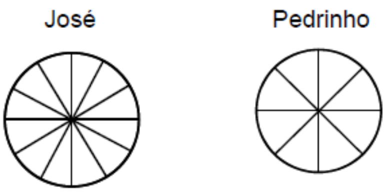

Fonte: Google imagens.



32. (PROVA BRASIL) A estrada que liga Recife a Caruaru será recuperada em três etapas. Na primeira etapa, será recuperado $\frac{1}{6}$ da estrada e na segunda etapa $\frac{1}{4}$ da estrada. Uma fração que corresponde à terceira etapa é

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) $\frac{4}{5}$

33. (PROVA BRASIL) Observe as figuras:



Pedrinho e José fizeram uma aposta para ver quem comia mais pedaços de pizza. Pediram duas pizzas de igual tamanho.
Pedrinho dividiu a sua em oito pedaços iguais e comeu seis; José dividiu a sua em doze pedaços iguais e comeu nove. Então, que conclusão eles chegaram?

34. (OBMEP 2019) Os números a e b são inteiros positivos tais que $\frac{a}{11} + \frac{b}{3} = \frac{31}{33}$. Qual é o valor de **a + b**?

(A) 5 (B) 7 (C) 14 (D) 20 (E) 31

35. (OBMEP 2019) Janaína tem três canecas, uma pequena, uma média e uma grande. Com a caneca pequena cheia, ela enche 3/5 da caneca média. Com a caneca média cheia, ela enche 5/8 da caneca grande. Janaína enche as canecas pequena e média e despeja tudo na caneca grande. O que vai acontecer com a caneca grande?

(A) Ela ficará preenchida em 7/8 de sua capacidade.
(B) Ela ficará preenchida em 8/13 de sua capacidade.
(C) Ela ficará preenchida em 5/8 de sua capacidade.
(D) Ela ficará totalmente cheia, sem transbordar.
(E) Ela vai transbordar.

36. (BIANCHINI-2015) Cássio iniciou uma viagem com o tanque do carro cheio. Na primeira parada, notou que havia gasto $\frac{1}{4}$ do combustível. Ao parar pela segunda vez, verificou que, entre a 1ª e a 2ª parada, o carro havia gasto metade do combustível que tinha sobrado na 1ª parada. Colocou, então, 30 litros de combustível, e o tanque ficou cheio novamente. Quantos litros cabem no tanque do carro de Cássio?

5. CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

De uma forma simplificada, número irracional é todo número real não-racional. Assim, enquanto o conjunto dos números racionais é formado por números inteiros, frações, números decimais finitos e os números decimais infinitos periódicos, o **conjunto dos números irracionais**, representado por '$\mathbb{I}$', é composto pelos números decimais infinitos não-periódicos, portanto, possuem infinitos elementos.

Exemplos de números irracionais: $\sqrt{2} = 1{,}41421$ ..., $\sqrt{10} = 3{,}16227$ ..., $\sqrt[3]{20} = 2{,}71441$ ..., $\sqrt[4]{8} = 1{,}68179$ ... (em geral, radicais que não possuem resultado exato, são números irracionais).

Existem alguns números irracionais famosos como:

- 'Pi': $\pi = 3{,}14159$ ..., determinado pela razão entre o comprimento da circunferência de um círculo e seu diâmetro. É utilizado, por exemplo, no cálculo do perímetro e área de um círculo;
- 'Número de Euler': $e = 2{,}71828$ ..., podendo ser utilizado, por exemplo, em tópicos como logaritmos e Matemática financeira.

Aplicações:

1. (ANDRINI-2012) Observe os números do quadro e atribua a cada número o valor 1 se ele for irracional e o valor 2 se racional.

$\frac{1}{4}$	$5 + \sqrt{2}$	$\sqrt{49}$
$3{,}222\ldots$	0	$0{,}5$
$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt{100}$	$\sqrt{16 + 4}$

Qual é a soma dos valores atribuídos?

Resolução:
São racionais: $\frac{1}{4}$; $\sqrt{49} = 7$; 3,222...; 0; 0,5; $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt{100} = 10$ (7 números)
São irracionais: $5 + \sqrt{2}$, $\sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$ (2 números)
Resposta: 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 16

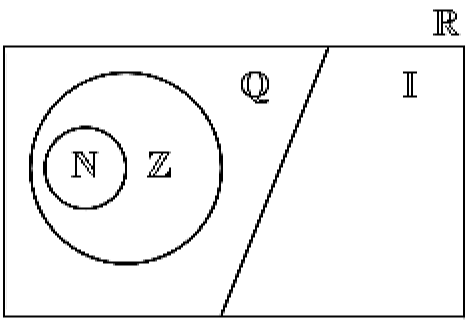
2. Em um disco circular de ferro liso e maciço, será colado uma fita em seu contorno e adesivos cobrindo completamente as áreas laterais (de um lado e do outro). Sabendo que o disco tem um diâmetro de 20 cm, qual deve ser o comprimento da fita e a área de cada adesivo a ser utilizado?

Resolução:
Para sabermos o comprimento da fita, devemos calcular o perímetro do círculo do disco. Para isso, usaremos a fórmula do comprimento de uma circunferência: $C = 2.\pi.r$.
Como o raio é a metade diâmetro, temos que $r = \frac{20}{2} = 10$ cm.
Assim, $C = 2.\pi.10 = 20\pi$ cm ou 62,8 cm (utilizando um valor aproximado $\pi = 3{,}14$).
No cálculo da área usamos a fórmula $A_c = \pi r^2 = \pi.(10)^2 = 100\pi\ cm^2$ ou 314 cm^2.

Resposta: A fita deverá ter, aproximadamente, 62,8 cm e cada adesivo, uma área de, aproximadamente, 314 cm^2.

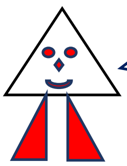
6. CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

O conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é composto pelos números naturais, inteiros, racionais e irracionais. Veja no diagrama abaixo, sua representação.



Fonte: Google imagens

Observe que $(\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}) \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$, ou seja, todo número natural é inteiro, todo número inteiro é racional; e da união dos conjuntos racionais e irracionais têm-se o conjunto dos números reais.

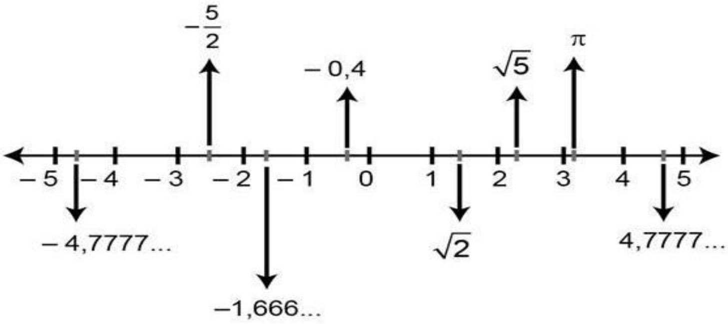


Vale a dica:
$\mathbb{Z} - \mathbb{N} =$ **números inteiros negativos**
$\mathbb{Q} - \mathbb{Z} =$ **números racionais não inteiros, exemplo:** $\frac{1}{3}$; **0,75; 2,333...; etc.**
$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{I}$
$\mathbb{R} - \mathbb{I} = \mathbb{Q}$

Fica, portanto, a pergunta: Afinal, quais são os números que não são reais?

De um modo simples, basta que pensemos em algumas situações em que o cálculo numérico não é possível de ser realizado dentro dos reais. Assim, logo lembraremos, por exemplo, da ‘raiz quadrada de um número negativo’ como $\sqrt{-4}$. É exatamente este o ponto, mas também poderia ser $\sqrt[4]{-81}$ ou $\sqrt[6]{-64}$. De modo geral, não existe, dentro do conjunto dos números reais, o cálculo com radicais de índice par e radicando negativo. Estes, portanto, não são números reais. Fazem parte do conjunto dos números complexos, conceito a ser estudado no ensino médio.

A representação geométrica do conjunto dos números reais é uma reta. Veja na figura a seguir, uma representação de uma parte da reta com alguns números.



Fonte: Google imagens.

6.1 Cálculo com decimais

Os números decimais podem ser finitos, por exemplo: 5,32; - 0,08; 75,561 (racionais); ou infinitos, por exemplo: 0,3333... (racional); 4,47213... (irracional).

Eles estão presentes nas mais diversas circunstâncias da vida real. Logo, compreender e saber operacionalizar com esses números, pode ser um diferencial importante nas ações econômicas, sociais e financeiras, em casa, no comércio ou no trabalho.

Os números decimais são compostos por duas partes, uma antes e outra depois da vírgula, chamadas, respectivamente, de parte inteira e parte decimal. Veja na tabela a seguir:

Parte inteira						Parte decimal				
...	Unidade de milhar (UM)	Centena (C)	Dezena (D)	Unidade (U)		Décimo (d)	Centésimo (c)	Milésimo (m)	Décimo de milésimo (dm)	...
	1	0	0	0						
		1	0	0						
			1	0						
				1						
				0	,	1				
				0	,	0	1			
				0	,	0	0	1		
				0	,	0	0	0	1	

Assim, veja como fazer a leitura dos números decimais:
a) 4,7 → quatro inteiros e sete décimos
b) 5,12 → cinco inteiros e doze centésimos
c) 30,001 → trinta inteiros e um milésimo
d) 0,06 → seis centésimos

Porém, é muito comum observarmos na linguagem oral do dia a dia ou nos meios de cominação a leitura dos números decimais sem especificar suas ordens:

a) 2,8 → dois vírgula oito
b) 2,015 → dois vírgula zero quinze
c) 0,225 → zero vírgula duzentos e vinte e cinco

6.1.1 Adição e subtração com números decimais

Para efetuar a adição ou subtração entre números decimais, basta considerar alguns detalhes:
- Colocar os números em ordem decrescente de cima para baixo;
- Posicionar vírgula embaixo de vírgula;
- Completar os espaços vazios com zero.
- Comece efetuando da direita para a esquerda.

Exemplos:
a) 5,29 + 4,1

	5	,	2	9
+	4	,	1	0
=	9	,	3	9

Resultado: 9,39
b) 12,08 – 7,62

	1	2	,	0	8
-	0	7	,	6	2
=		4	,	4	6

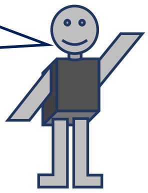
Vamos transformar 1 inteiro em 10 décimos, assim, 10 – 6 = 4. Restará 11 inteiros. 11 – 7 = 4

Resultado: 4,46

c) 1,5 – 0,082

	1	,	5	0	0
-	0	,	0	8	2
=					

Vamos reescrever a parte decimal considerando que 5 décimos = 4 décimos + 9 centésimos + 10 milésimos.



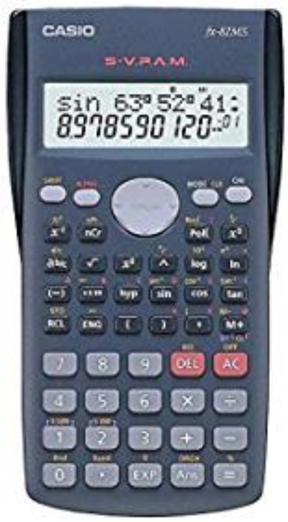
Assim, teremos:

	1	,	4	9	10
-	0	,	0	8	2
=	1	,	4	1	8

Resultado: 1,418

6.1.2 Multiplicação e divisão com números decimais

Nessa parte de cálculo com números decimais envolvendo multiplicação e divisão, é interessante a utilização de uma calculadora. A seguir são apresentados dois modelos: uma ‘comum’ e outra científica.



Fonte: Google imagens

Aplicações:

1. Antes de ir a um supermercado na cidade de Paraíso – TO, uma dona de casa preparou a lista de produtos e a quantidade de cada um deles que deveriam ser comprados. Preocupada com a instabilidade dos preços das mercadorias, decidiu levar consigo uma calculadora do modelo ‘comum’, assim, poderia ir fazendo suas contas ao mesmo tempo que colocava os itens no carinho, evitando, com isso, surpresas e desconforto de ter que devolver algum produto ao chegar no caixa. Considerando a lista com os preços abaixo, ao terminar suas compras e sabendo que tinha disponível R$ 200,00, que conclusão a dona de casa chegou:

I) o dinheiro era exatamente o mesmo valor da compra;

II) o dinheiro era insuficiente e, portanto, deveria rever os itens do carrinho;

III) o dinheiro era suficiente e ainda sobraria um troco.

Quantidade	Produto	Preço de cada item
2	Pacote de arroz	R$ 19,90
5	Pacotes de feijão	R$ 6,99
3	Litros de óleo de soja	R$ 4,98
4	Pacotes de macarrão de 500 g	R$ 2,85
4	Latas de sardinha	R$ 3,89
1	Caixa de sabão em pó 1 kg	R$ 9,80
3	Latas de extrato de tomate	R$ 3,50
2	Pacotes de açúcar 1 kg	R$ 6,89
2	Pacote de café 500 g	R$ 10,99
3	Sabonetes	R$ 2,99
30	Ovos	R$ 0,48

Resolução:

Primeiramente, vamos conhecer algumas teclas de uma calculadora modelo ‘comum’: M+ (adição na memória), M- (subtração na memória), MRC (resultado/registro da memória), AC ou ON/C (apaga os registros sem desligar a calculadora) e CE (limpa a entrada mais recente).

Seguindo a ordem da lista de compra, aperte as teclas na sequência, como se segue:
2 x 19,90 M+ (aperte em seguida AC ou ON/C dependendo do modelo da calculadora).: 5 x 6,99 M+ AC
3 x 4,98 M+ AC
4 x 2,85 M+ AC
4 x 3,89 M+ AC
1 x 9,80 M+ AC
3 x 3,50 M+ AC
2 x 6,89 M+ AC
2 x 10,99 M+ AC
3 x 2,99 M+ AC
30 x 0,48 M+ AC
Agora aperte a tecla MRC (resultado da operação), neste caso, R$ 196,08
Resposta: o dinheiro era suficiente e ainda sobraria um troco de R$ 3,92.
Obs.: Para limpar a memória da calculadora aperte em sequência MRC→ M-

2. Três amigos decidem formar uma sociedade. Para mobilhar o escritório foram necessários R$ 21.247,50. Esse valor foi dividido na loja em 10 parcelas mensais iguais. Sabendo que o valor de cada parcela será dividido igualmente entre eles, qual o valor mensal que cada um terá que desembolsar?

Resolução:
Primeiro dividimos o valor total por 10, para sabermos o valor mensal a ser pago na loja.
21.247,50 : 10 = 2.124,75
Em seguida, pegamos o resultado dessa operação e dividimos por 3 para sabermos o valor mensal a ser pago por cada um deles.
2.124,75 : 3 = 708,25

Resposta: R$ 708,25

Reflexão do autor:
Parte importante do conhecimento aritmético, a aprendizagem dos números reais proporciona uma melhoria na capacidade de leitura e interpretação do mundo, contribuindo, assim, no desenvolvimento de habilidades matemáticas, tais como na geometria, álgebra, trigonometria, probabilidade, estatística, matemática financeira. Outrossim, no mundo moderno e tecnológico de hoje, lidar com os números não é uma opção, e sim, uma necessidade. Quando se apresenta um bom desempenho no trato com esses números, as possibilidades se expandem na vida, nos estudos, no mercado de trabalho. Ademais, pode ocorrer de você não ter contato com alguns deles, outros, porém, farão parte da sua rotina. Portanto, quanto mais aprofundado for seu aprendizado, melhor e maior será o grau de significância desses números na sua vida.

ATIVIDADES V

37. (DANTE-2015) Os números reais aparecem nas mais variadas situações de nosso dia a dia. Veja alguns exemplos nos itens a seguir. Complete cada sentença com um

número real. Depois, escreva se o número é **real racional inteiro**, **real racional não inteiro** ou **real irracional**.
Por exemplo: uma dúzia e meia de ovos corresponde a 18 ovos. 18 é um número real racional inteiro.
a) Marcela dividiu um bolo em 6 partes iguais. Cada uma das partes corresponde a ___ do bolo.

b) A área de um piso quadrado é de 70 m^2. Cada lado do piso mede ___ m.

c) Uma peça com 14 m de tecido foi repartida em 4 partes iguais. Cada uma das partes mede ___m.

d) Se a temperatura de um dia de inverno era de +4 °C e teve uma queda de 6 °C, a temperatura passou a ser de ___ °C.

e) Se a medida do comprimento do contorno de uma praça circular for dividida pelo dobro da medida de seu raio, o resultado será ___.

f) Um musical durou 2 horas e 20 minutos. Esse valor também pode ser indicado por ___ horas.

38. Pedro mora na cidade de Palmas – TO e trabalha em uma empresa que fica a 18 km de distância da sua residência. Como almoça em casa, acaba percorrendo esse trajeto 4 vezes ao dia de segunda-feira a sexta-feira. No sábado, trabalha até meio dia, portanto, faz duas viagens, ida e volta. Para se locomover, usa como transporte uma moto que percorre em média 35,5 km com um litro de gasolina. Com o preço da gasolina custando em média R$ 6,95, Pedro resolveu economizar. Durante os dias da semana levará seu almoço e, assim, fará apenas duas viagens, ida e volta. Com essa atitude, quanto, aproximadamente, Pedro conseguirá economizar em quatro semanas?

39. (PRAVALER) Um grupo de amigos tem um time de futebol e necessita comprar uniformes novos. Para tanto, um modelo de uniforme foi escolhido e orçamentos foram tomados em quatro lojas, conforme descrito na tabela:

Loja	Camisa (R$)	Calção (R$)	Par de meiões (R$)
1	26,00	14,00	9,00
2	29,00	13,00	8,00
3	31,00	13,00	5,00
4	32,00	10,00	7,00

As lojas só vendem uniformes completos: camisas, calções e pares de meiões. O grupo vai se reunir para escolher três das propostas mais adequadas para tentar uma segunda negociação de preços, eliminando a loja que apresentar o orçamento mais caro para a compra de um uniforme completo. Qual dessas lojas terá seu orçamento eliminado?

40. (ENCCEJA 2020) Na banca de um determinado feirante encontram-se as seguintes placas de preços:

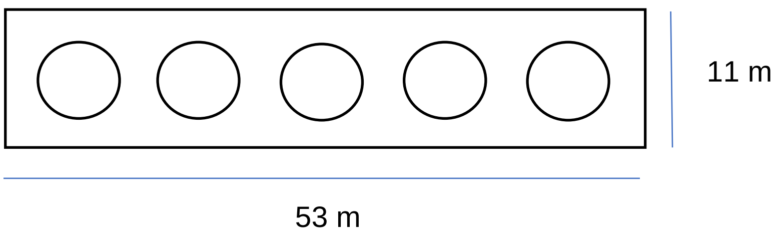
Uma pessoa chegou à feira com R$ 25,00 e comprou, nessa banca, 2 kg de tomate, 4 kg de batata e 3 kg de cebola. Ela pretende gastar o restante do dinheiro comprando pimentão, mas reservando R$ 2,35 para pegar o ônibus de volta para casa. A quantidade de pimentão, em quilograma, que essa pessoa conseguirá comprar naquela banca é:
(A) 2,500.
(B) 3,675.
(C) 5,000.
(D) 8,475.

41. (ENCCEJA 2020) O dono de um automóvel bicombustível queria verificar qual combustível lhe proporcionaria menor gasto mensal, considerando que seus deslocamentos diários eram feitos sempre pelos mesmos trajetos. Em cada abastecimento, colocou a mesma quantidade de combustível e anotou o valor pago pelo abastecimento. Posteriormente, calculou a distância percorrida com aquela quantidade de combustível e construiu o seguinte quadro:

Tipo de combustível	Valor pago (R$)	Distância percorrida (km)
Gasolina comum	210	350
Gasolina aditivada	270	360
Etanol	175	250

O critério de rendimento utilizado por essa pessoa foi observar quanto ela gastava para percorrer cada quilômetro com seu carro, quando abastecido pelos diferentes tipos de combustíveis. Ordenando os combustíveis pelo seu critério de rendimento, do mais econômico para o menos econômico, o dono do automóvel obteve corretamente a sequência
(A) etanol – gasolina comum – gasolina aditivada.
(B) gasolina aditivada – gasolina comum – etanol.
(C) gasolina comum – etanol – gasolina aditivada.
(D) gasolina aditivada – etanol – gasolina comum.

42. Na figura abaixo, estão indicadas as dimensões de um terreno retangular. Nele serão reservadas 5 regiões circulares idênticas de 8 m de diâmetro, para instalação de silos. No restante do terreno será colocado uma grama que custa R$ 6,75 o metro quadrado. Assim, tendo como base a área destinada ao gramado e seu preço por m^2, qual o valor a ser gasto? (Dados: Área do retângulo = base . altura; área do círculo: $\pi . r^2$; $\pi = 3{,}14$).



43. (ENEM 2020) Uma pessoa precisa comprar 15 sacos de cimento para uma reforma em sua casa. Faz pesquisa de preço em cinco depósitos que vendem o cimento de sua preferência e cobram frete para entrega do material, conforme a distância do depósito à sua casa. As informações sobre preço do cimento, valor do frete e distância do depósito até a casa dessa pessoa estão apresentadas no quadro abaixo:

Depósito	Valor do saco de cimento	Valor do frete para cada quilômetro	Distância entre a casa e o depósito
	(R$)	(R$)	(km)
A	23,00	1,00	10
B	21,50	3,00	12
C	22,00	1,50	14
D	21,00	3,50	18
E	24,00	2,50	2

A pessoa escolherá um desses depósitos para realizar sua compra, considerando os preços do cimento e do frete oferecidos em cada opção. Se a pessoa decidir pela opção mais econômica, o depósito escolhido para a realização dessa compra será o:
(A) A
(B) B
(C) C
(D) D
(E) E

44. (ENEM 2019) Para a compra de um repelente eletrônico, uma pessoa fez uma pesquisa nos mercados de seu bairro. Cada tipo de repelente pesquisado traz escrito no rótulo da embalagem as informações quanto à duração, em dia, associada à quantidade de horas de utilização por dia. Essas informações e o preço por unidade foram representados no quadro a seguir:

Tipo	Duração em dia	Horas por dia de utilização	Preço em real
I	30	12	12,00
II	32	9	9,00
III	40	10	10,00
IV	44	8	11,00
V	48	8	12,00

A pessoa comprará aquele que apresentar o menor custo diário, quando ligado durante 8 horas por dia. Nessas condições, o repelente eletrônico que essa pessoa comprará é do tipo:
(A) I
(B) II
(C) III
(D) IV
(E) V

7. UNIDADES DE MEDIDA

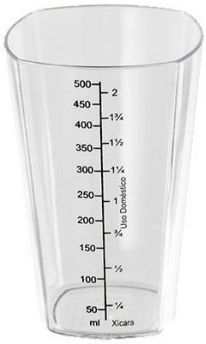
O ser humano, através dos tempos, sempre sentiu a necessidade de medir. Realizamos medições com muita naturalidade em praticamente tudo que fazemos em nosso dia-a-dia. Por muito tempo, cada povo teve o seu próprio sistema de medidas e, em geral, as unidades de medidas primitivas estavam baseadas em partes do corpo humano, conhecidas como medidas antropomórficas, que eram referências comuns, pois ficava fácil chegar-se a uma medida que podia ser verificada por qualquer pessoa.

Fonte: https://metrologia.org.br/wpsite/wp-content/uploads/2019/07/Cartilha_O_novo_SI_29.06.2029.pdf

Foi assim que surgiram medidas padrão como o cúbito, a braça, a jarda e o pé. Como as pessoas têm tamanhos diferentes, claramente havia a necessidade de um sistema de medidas mais seguro e universal, sobretudo, para facilitar e tornar mais justas as transações comerciais, além de garantir a coerência e confiança das medições.

O sistema métrico decimal foi criado após a revolução francesa. A Convenção do Metro foi assinada por representantes de 17 (dezessete) países, entre eles o Brasil, em 20 de maio de 1875, em Paris. Com ela, a criação do Sistema Métrico Decimal foi o passo inicial para a criação do Sistema Internacional de Unidades (SI), ocorrida durante a 11ª Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM), realizada em 1960.

O SI possui sete unidades de base: o metro (comprimento), o quilograma (massa), o segundo (tempo), o ampere (corrente elétrica), o kelvin (temperatura termodinâmica), o mol (quantidade de substância) e a candela (intensidade luminosa). Esse sistema é prático, coerente e mundialmente aceito nas relações internacionais, no ensino e nas pesquisas científicas, que evolui continuamente para refletir as melhores práticas de medição. As sete unidades de base do SI fornecem as referências que permitem definir todas as unidades de medida do Sistema Internacional.
Fonte: Texto retirado de "O novo Sistema Internacional de Unidades" (ALVES; ROCHA, 2019).
A seguir, tem-se um estudo de algumas grandezas como comprimento, massa, superfície e volume, com suas unidades de medida, múltiplos e submúltiplos.



Fonte: Google imagens

7.1 Medidas de comprimento

O metro (m)
De acordo com o novo SI (Sistema Internacional de Unidades), “o metro (m) é a unidade de comprimento no SI. Se define ao fixar o valor numérico da velocidade da luz no vácuo, c, em 299 792 458, quando se expressa a unidade em $m.s^{-1}$, onde o segundo é definido em função da frequência de césio, Δ_{vCs}” (ALVES; ROCHA, 2019, p. 7).

Além da unidade fundamental de comprimento, o metro, existem ainda os seus múltiplos e submúltiplos, conforme tabela abaixo.

Múltiplos			Unidade Fundamental	Submúltiplos		
Quilômetro	Hectômetro	Decâmetro	Metro	Decímetro	Centímetro	Milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1.000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m

Veja a seguir como fazer algumas das principais conversões:

km	→	**m**	x 1.000	**m**	→	**km**	÷ 1000
m	→	**dm**	x 10	**dm**	→	**m**	÷ 10
m	→	**cm**	x 100	**cm**	→	**m**	÷ 100
m	→	**mm**	x 1.000	**mm**	→	**m**	÷ 1.000
dm	→	**mm**	x 100	**mm**	→	**dm**	÷ 100
cm	→	**mm**	x 10	**mm**	→	**cm**	÷ 10
dm	→	**cm**	x 10	**cm**	→	**dm**	÷ 10

Exemplos:
a) 2,8 km = 2.800 m
b) 30 mm = 0,03 m = 3 cm
c) 50 cm = 5 dm
d) 20 dm = 2.000 mm

7.2 Medidas de superfície

O estudo das áreas é uma parte importante da Matemática, especialmente na Geometria, com aplicações algébricas e aritméticas. Existem diversas fórmulas e conceitos para se calcular a área de uma determina região, dependendo, nesse caso, do seu modelo geométrico.
Pelo SI, a unidade padrão usada para expressar uma medida de área é o metro quadrado (m^2), possuindo também seus múltiplos e submúltiplos: quilômetro quadrado (km^2), hectômetro quadrado (hm^2), decâmetro quadrado (dam^2), decímetro quadrado (dm^2), centímetro quadrado (cm^2) e milímetro quadrado (mm^2).

$x\ 10^2$ $x\ 10^2$ $x\ 10^2$ $x\ 10^2$ $x\ 10^2$ $x\ 10^2$

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

$\div\ 10^2$ $\div\ 10^2$ $\div\ 10^2$ $\div\ 10^2$ $\div\ 10^2$ $\div\ 10^2$

Pela tabela temos:
a) $1\ km^2 = 10^6\ m^2$
b) $1\ m^2 = 10^2 dm^2 = 10^4\ cm^2 = 10^6 mm^2$.
c) $1cm^2 = 10^{-4} m^2\ ou\ 0{,}0001\ m^2$
d) $1mm^2 = 10^{-6} m^2\ ou\ 0{,}000001\ m^2$
e) $1dm^2 = 10^{-2} m^2\ ou\ 0{,}01\ m^2$

Existem ainda as chamadas medidas agrárias, como por exemplo o hectare (ha) e o alqueire. O primeiro corresponde a uma região de 10.000 m², já o segundo, possui uma correspondência diferente na quantidade de m² utilizados pelos estados brasileiros.
Estudo complementar: Faça uma pesquisa para saber, por exemplo, quanto mede (em m²), 1 alqueire Tocantinense e compare com de outros estados no Brasil.

7.3 Medidas de massa

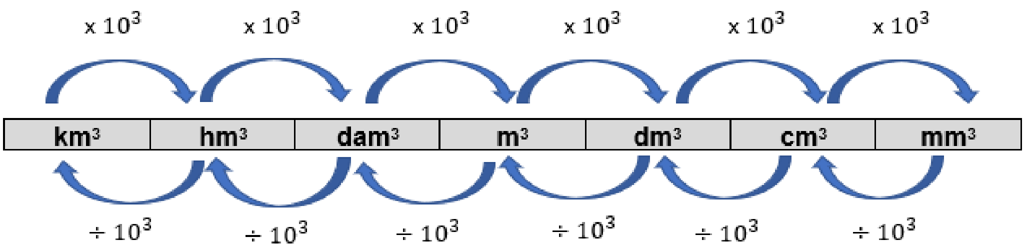
Massa é a quantidade de matéria que um corpo possui. A unidade de medida utilizada no SI para medi-la é o quilograma (kg). Porém, existem outras como a grama (g) e tonelada (t), muito utilizadas no dia a dia. Veja na tabela abaixo os múltiplos e submúltiplos da grama.

Múltiplos			Unidade Fundamental	Submúltiplos		
Quilograma	Hectograma	Decagrama	Grama	Decigrama	Centigrama	Miligrama
kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
1.000 g	100 g	10 g	1 g	0,1 g	0,01 g	0,001 g

Exemplos:
a) 1 t = 1.000 kg
b) 1,75 kg = 1.750 g
c) 600 g = 0,6 kg
d) 5.380 mg = 5,38 g = 0,00538 kg

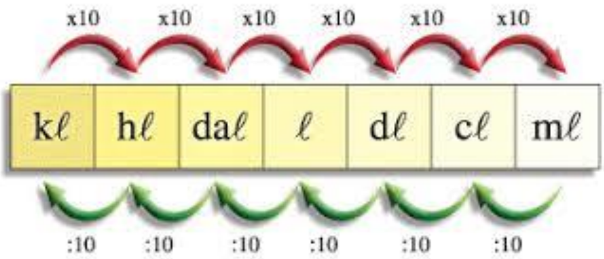
7.4 Medidas de volume

A unidade de medida fundamental de volume é o metro cúbico (m³). Veja no esquema abaixo, a relação com seus múltiplos e submúltiplos.



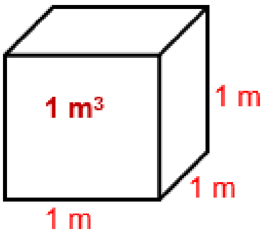
Exemplos:
a) $2\ m^3 = 2.000\ dm^3$
b) $500\ cm^3 = 0{,}0005\ m^3$ ou $5 \times 10^{-4}\ m^3$

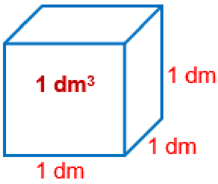
O volume de um recipiente também pode ser expresso através das **medidas de capacidade**: quilolitro (kl), hectolitro (hl), decalitro(dal), litro(l), decilitro(dl), centilitro (cl) e mililitro (ml).

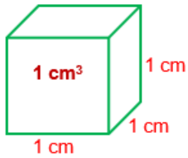


Fonte: google imagens

Existem algumas importantes relações entre medidas de volume e medidas de capacidade.



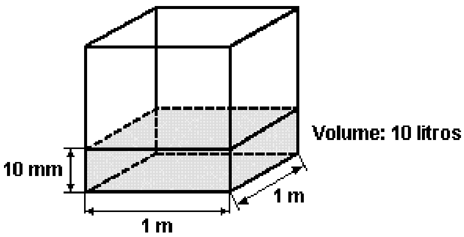




$1\ m^3 = 1.000$ litros   **$1\ dm^3 = 1$ litro**   **$1\ cm^3 = 1$ mililitro**

Aplicações:

1. (Unifesp 2004) Quando se diz que numa determinada região a precipitação pluviométrica foi de 10 mm, significa que a precipitação naquela região foi de 10 litros de água por metro quadrado, em média.



Se numa região de 10 km^2 de área ocorreu uma precipitação de 5 cm, quantos litros de água foram precipitados?

(A) 5×10^7 (B) 5×10^8 (C) 5×10^9 (D) 5×10^{10} (E) 5×10^{11}

Resolução:

Sabemos que uma precipitação de 10 mm = 10 litros por m^2.

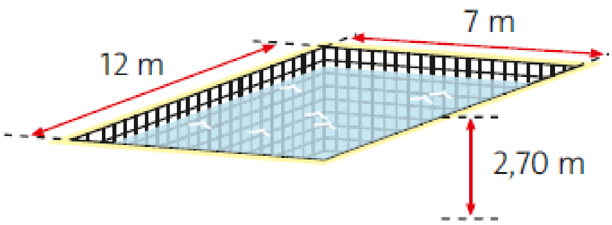
Vamos transformar 5 cm em mm: 5 cm = $5 \times 10 = 50$ mm.

Neste caso, ouve uma precipitação pluviométrica de 50 mm, ou seja, 50 l por m^2.

Por outro lado, $1\ km^2 = 10^6\ m^2$. Ou ainda, $10\ km^2 = 10 \times 10^6 = 10^7\ m^2$.

Resposta: $50 \times 10^7 = 5 \times 10 \times 10^7 = 5 \times 10^8$ litros. Alternativa 'B'.

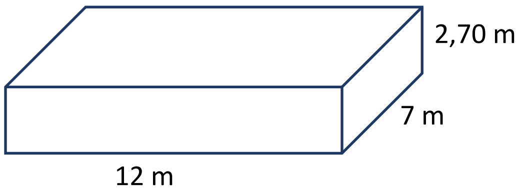
2. (DANTE-2016) Observe a piscina representada abaixo e as dimensões indicadas. Qual é a quantidade máxima de água, em litros, que essa piscina pode conter?



Resolução:
Volume do paralelepípedo retângulo ou bloco retangular: **V = a x b x c**.

$$\begin{cases} a: comprimento \\ b: largura \\ c: altura \end{cases}$$

Veja abaixo o esboço da piscina:



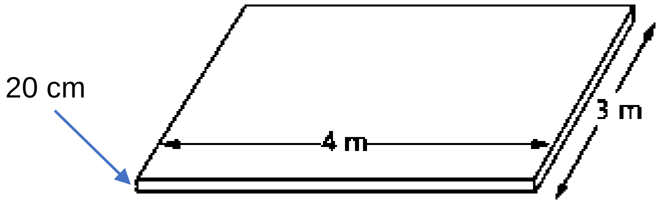
V = 12 x 7 x 2,70 = 226,8 m^3. Como 1 m^3 = 1.000 l, temos que: 226,8 x 1.000 = 226.800 l.
Resposta: 226.800 litros.

Reflexão do autor:
Compreender e realizar a conversão de unidades medidas são fundamentos importantes da Matemática, pois possuem aplicações concretas em diversos contextos da realidade. Aprimorar seus conhecimentos acerca desses conceitos, permitirão ao estudante agir em situações que exigem tais saberes, de forma mais incisiva e segura, evitando enganações, erros ou prejuízos.

ATIVIDADES VI

45. Em uma panificadora são produzidos 840 pães pela manhã e 360 pães à tarde. Cada pão possui uma massa de 50 g. Um quilograma desse pão é vendido a R$ 14,00.
Caso a panificadora consiga vender toda sua produção diária, qual será a quantia arrecadada? E qual o preço de venda de uma unidade desse pão?

46. (DANTE-2016) Qual é o volume de concreto necessário para construir uma laje de 20 cm de espessura em uma sala de 3 m por 4 m?



47. (ENCCEJA 2018) Uma pessoa está planejando um churrasco para vinte pessoas. Embora se recomende 400 gramas de carne por pessoa, ela decide economizar e

reduzir a quantidade em 100 gramas. Qual a quantidade de carne, em quilograma, que essa pessoa comprará para o churrasco?
(A) 6 (B) 8 (C) 60 (D) 80

48. (ENCCEJA 2019) Um frasco que continha 3,5 L de uma determinada substância trincou-se. Com isso, perderam-se 300 mL de seu conteúdo. O restante da substância que permaneceu no frasco será transferido para recipientes com capacidade de 250 mL cada. A quantidade mínima desses recipientes necessária para acomodar o restante da substância é:
(A) 1. (B) 2. (C) 13. (D) 14.

49. Dona Joana preparou uma massa para fazer um bolo de chocolate, que ocupou uma assadeira de 1,8 litros de capcidade. Depois de pronto, ela cortou o bolo em padaços de 60 cm^3 de volume. Em quantos desses pedaços o bolo foi dividido?

50. (SABER MATEMÁTICA) O perímetro de um triângulo é 0,097 m e dois de seus lados medem 0,21 dm e 42 mm. Determine a medida do terceiro lado, em centímetros.

51. (PM RN – Consultec) Sabe-se que 1 hectare é equivalente a 10.000 m^2, ou seja, a um quadrado de lado 100 m. Se os 800.000 habitantes da cidade de Natal fossem uniformemente distribuídos nos 172 km^2 da área da cidade, então é correto afirmar que, em cada hectare, deveriam morar, aproximadamente:
(A) 4.600 pessoas.
(B) 480 pessoas.
(C) 460 pessoas.
(D) 48 pessoas.
(E) 46 pessoas.

52. (PM PI – Nucepe) José comprou um sítio de 14 hectares, reservando, para a construção da casa e área de lazer, 1/4 do terreno. O restante, José usou para plantar arroz, milho e feijão. Se a área plantada tem 2/7 de arroz e 3/5 de milho, quantos metros quadrados do terreno foram ocupados com a plantação de feijão?

53. (ENEM 2019) A bula de um antibiótico infantil, fabricado na forma de xarope, recomenda que sejam ministrados, diariamente, no máximo 500 mg desse medicamento para cada quilograma de massa do paciente. Um pediatra prescreveu a dosagem máxima desse antibiótico para ser ministrada diariamente a uma criança de 20 kg pelo período de 5 dias. Esse medicamento pode ser comprado em frascos de 10 mL, 50 mL, 100 mL, 250 mL e 500 mL. Os pais dessa criança decidiram comprar a quantidade exata de medicamento que precisará ser ministrada no tratamento, evitando a sobra de medicamento. Considere que 1 g desse medicamento ocupe um volume de 1 cm^3. A capacidade do frasco, em mililitro, que esses pais deverão comprar é:
(A) 10 (B) 50 (C) 100 (D) 250 (E) 500

3. RAZÃO, PROPORÇÃO E GRANDEZAS PROPORCIONAIS

8.1 Razão

A razão entre dois números **a** e **b**, com b $\neq$ 0, é o quociente de **a** por **b** (**a : b**), que também pode ser indicado por $\frac{a}{b}$ ou qualquer outra forma equivalente.

Assim, ao afirmar, por exemplo, que para cada 7 trabalhadores de uma fábrica, 5 são homens, estamos utilizando o conceito de razão. Neste caso, a razão entre o número total de homens e número total de funcionários é 5:7 ou $\frac{5}{7}$. O que leva a deduzir também, sobre estes funcionários, que o número de mulheres está para o número de homens na razão de 2 para 5 ou 2 : 5 = $\frac{2}{5}$ = 0,4.

Exemplo: A razão entre o número de dias de uma semana e o número de dias do mês de abril é $\frac{7}{30}$.

Existem alguns tipos de razões especiais como: escala, velocidade média e densidade demográfica.

Escala (E) é a razão entre o comprimento em um desenho (ou outra representação qualquer) (d) e o comprimento real correspondente (D), expressos em uma mesma unidade de medida.

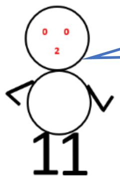
$$\boldsymbol{E = \frac{d}{D}}$$

Velocidade média ($\boldsymbol{V_m}$) é a razão entre o espaço percorrido (ΔS) e o tempo gasto para percorrê-lo (ΔT).

$$\boldsymbol{V_m = \frac{\Delta S}{\Delta T}}$$

Densidade demográfica é a razão entre o número de habitantes de uma região e a área dessa região.

$$\boldsymbol{Densidade\ demográfica = \frac{Total\ de\ habitantes}{Área}}$$



Sugestão de estudo:
Pesquise sobre outras razões importantes, tanto na Matemática, como em outras áreas do conhecimento.

Aplicações:

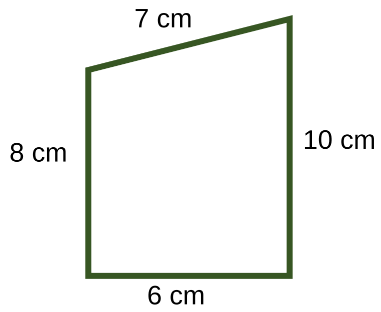
1. Na empresa ‘Bem Bom’, o quadro de funcionários é constituído por mulheres e homens na razão de 7 para 8, respectivamente. Devido a melhoria nas vendas, a empresa resolveu aumentar o número de funcionários que hoje é de 120. Porém, pretende contratar apenas mulheres e em quantidade suficiente para que se tenha a mesma quantidade de homens. Neste caso, quantas mulheres devem ser contratadas?

Resolução:
De acordo com a razão proposta no problema, para cada grupo de 15 funcionários (7 + 8), 7 são mulheres e 8 são homens.
Assim, temos que: 120 : 15 = 8 grupos.
Logo, são 8 x 7 = 56 mulheres e 8 x 8 = 64 homens.

Assim, 64 – 56 = 8. Ou seja, existe no quadro de funcionários, 8 homens a mais do que mulheres.

Resposta: devem ser contratadas 8 mulheres.

2. No desenho abaixo está representado a área de um terreno, cuja escala utilizada foi 1 : 5000. O dono desse terreno deseja cercá-lo com 4 voltas de um tipo de arrame liso que custa R$ 0,79 o metro. Sendo assim, qual o valor mínimo a ser gasto na compra dessa quantidade de arame?



Resolução:
Perímetro do desenho: 10 + 7 + 8 + 6 = 31 cm.
De acordo com a escala, cada 1 cm no desenho corresponde a 5.000 cm no real.
Logo, 31 x 5.000 = 155.000 cm = 1.550 m.
Como são 4 voltas, temos: 4 x 1.550 = 6.200 m.
Cada metro do arame custa R$ 0,79, então, 6.200 x 0,79 = 4.898.

Resposta: R$ 4.898,00

8.2 Proporção

Proporção é uma igualdade entre duas razões. Ou de outra forma, podemos dizer que os números **a**, **b**, **c** e **d**, com **b** e **d** diferentes de zero, formam, nessa ordem, uma proporção quando:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \begin{cases} a, b, c, d\text{: são os termos da proporção} \\ a; d\text{: são os extremos} \\ b; c\text{: são os meios} \end{cases}$$

Lê-se: **a** está para **b** assim como **c** está para **d**.

Propriedade fundamental das proporções: Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ (b, d \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a \times d = b \times c}$$

Exemplos:

a) os números 5, 7, 15 e 21, nessa ordem, formam uma proporção, pois, $\frac{5}{7} = \frac{15}{21} \Rightarrow$
5 x 21 = 7 x 15 ⇒ 105 = 105

b) os números 3, 9, 7 e 63, nessa ordem, **não** formam uma proporção, pois, $\frac{3}{9} \neq \frac{7}{63} \Rightarrow$
3 x 63 ≠ 9 x 7 ⇒ 189 ≠ 63.

Aplicações:

1. (BIANCHINI-2015) A miniatura de um carro, construída na escala 1:96, tem 5,5 cm de comprimento. Qual é o comprimento real do carro?

Resolução: Podemos representar o comprimento real do carro por ‘k’. Assim, temos que o comprimento da miniatura (5,5) está para o comprimento real do carro (k), na razão de 1 para 96. Ou seja, $\frac{5,5}{k} = \frac{1}{96}$. Aplicando a propriedade fundamental da proporção, obtemos: k x 1 = 5,5 x 96, ou seja, k = 528 cm ou 5,28 m.

Resposta: 5,28 metros.

8.3 Grandezas proporcionais

Grandeza é tudo o que pode ser medido ou contado. Assim, são exemplos de grandezas: o comprimento, a superfície, a temperatura, a massa, o tempo, o preço e a idade.

Vamos analisar as situações seguintes, identificando os valores de **k**, **m**, **n**, **x**, **y** e **z**.

Tabela 1: quantidade de latas de tinta e seu rendimento

Quantidade de latas de tinta.	1	2	m	5
Área pintada (em m^2)	80	k	40	n

Agora pense e responda: Se com 1 lata de tinta é possível pintar 80 m^2, dobrando a quantidade de latas utilizadas, o que acontecerá com área pintada? E se quintuplicar o número de latas? As respostas nesses casos são: dobrará e quintuplicará, respectivamente. Sendo assim, k = 160 e n = 400.

Por outro lado, se reduzirmos a área a ser pintada pela metade, a quantidade de tinta a ser utilizada, também reduzirá pela metade. Logo, m = $\frac{1}{2}$ ou 0,5 (meia lata de tinta). Essas grandezas são, portanto, diretamente proporcionais.

De maneira geral, duas grandezas são **diretamente proporcionais**, quando dobrado, triplicado ou é reduzido à metade o valor de uma delas, o valor da outra também dobra, triplica ou reduz pela metade, e assim por diante.

Tabela 2: velocidade média e o tempo gasto ao percorrer uma certa distância.

Velocidade média (em km/h)	80	x	160	40
Tempo (em horas)	5	20	y	z

Nessa situação, nota-se que aumentando a velocidade média, o trajeto será realizado em menos tempo, ou seja, quanto maior a velocidade média, menor o tempo gasto no trajeto. Sendo assim, se dobrarmos a velocidade média, o tempo cairá pela metade (y = 2,5). Por outro lado, se reduzirmos a velocidade média à metade, o tempo dobrará (z = 10). Note também que, reduzindo a velocidade média pela quarta parte, o tempo quadruplicará. Logo, x = 20.

De maneira geral, duas grandezas são **inversamente proporcionais**, quando dobrado o valor de uma, o valor da outra reduz pela metade; triplicando o valor de uma, o valor da outra reduz a terça parte; quadruplicando o valor de uma, o valor da outra reduz pela quarta parte; e assim por diante.

Aplicações:

1. Dividir a quantia de R$ 4.185 em três partes diretamente proporcionais a 2, 3 e 4.

Resolução:
Como as grandezas são diretamente proporcionais, vamos encontrar a constante de proporcionalidade, dividindo o valor total pela soma das partes (2 + 3 + 4 = 9). Ou seja, 4.185 : 9 = 465.
Agora, basta multiplicar cada uma das partes pela constante de proporcionalidade.
2 x 465 = 930; 3 x 465 = 1.395 e 4 x 465 = 1.860.

Resposta: R$ 930,00; R$ 1.395,00 e R$ 1.860,00.

2. (Joamir Roberto de Souza-2018) Para o transporte dos participantes de uma excursão, será fretado um ônibus com capacidade para 46 passageiros. O preço do fretamento é fixo, independentemente da quantidade de participantes da excursão. A despesa com esse fretamento será dividida igualmente entre os participantes: caso sejam 20 participantes, por exemplo, cada um deles terá de pagar R$ 92,00. Quantos reais, no mínimo, um participante dessa excursão pode pagar pelo fretamento do ônibus?

Resolução:
De acordo com o problema, se dobrarmos o número de participantes, o valor a ser pago por cada um reduzirá pela metade. Logo, as grandezas são inversamente proporcionais.
Assim, o valor mínimo ‘k’ ocorrerá com a lotação máxima 46.
Portando, 20 é inversamente proporcional a 92, assim como 46 é inversamente proporcional a k.
Ou seja, $\frac{20}{\frac{1}{92}} = \frac{46}{\frac{1}{k}}$ ⇒ 20 x 92 = 46 x k ⇒ 46k = 1.840 ⇒ k = $\frac{1.840}{46} = 40$

Resposta: R$ 40,00

Reflexão do autor:
O conceito de razão, por definição, é básico. Porém, possui vasta aplicabilidade em muitos componentes curriculares, como também em diversos setores da sociedade, comércio, construção civil, saúde, esporte. As grandezas organizam e nos ajudam a compreender o espaço que nos cerca. Proporcionam interpretações e leituras que auxiliam no ser, estar e agir no mundo. Ademais, ampliar seus conhecimentos sobre razão e proporcionalidade representa mais um passo no universo das oportunidades, além de permitir planejar e executar melhor ações e serviços.

ATIVIDADES VII

54. (ANDRINI-2012) Um saquinho com 24 balas será repartido entre crianças. Com essa informação, calcule os valores de a, b e c.

Números de crianças	2	a	4	c
Quantidade de balas	12	8	b	4

Essas grandezas são direta ou inversamente proporcionais?

55. Uma herança de R$ 78.000,00 deve ser repartida entre 4 irmãos João, Maria, Pedro e Ricardo, cujas idades são, respectivamente, 12 anos, 15 anos, 17 anos e 21 anos. Sabendo que o valor a receber é diretamente proporcional à idade, quanto receberá cada um deles?

56. (Joamir Roberto de Souza-2018) As inundações em áreas urbanas são problemas recorrentes em diversas regiões do Brasil e causam prejuízos ambientais, sociais e econômicos.
Em certo município, foram construídos reservatórios para captar a água da chuva que escoa pelas galerias pluviais, diminuindo o risco de inundações. Para encher completamente um reservatório desses, com uma vazão de 18 m^3 de água por segundo, leva-se 20 min. Qual é o tempo necessário para encher esse reservatório, com uma vazão de 30 m^3 por segundo?

57. (DANTE-2015) Em uma empresa, a razão do número de mulheres para o número de homens é de 1 para 3. Se forem contratadas mais duas mulheres, a razão passará a ser de 1 para 2. Quantas mulheres e quantos homens há nessa empresa?

58. (UFBA) Sessenta das 520 galinhas de um aviário não foram vacinadas; morreram 92 galinhas vacinadas. Para as galinhas vacinadas, a razão entre o número de mortas e de vivas é:
(A) 4/5 (B) 5/4 (C) 1/4 (D) 4/1 (E) 1/5

59. Divida um segmento de 132 cm em três pedaços inversamente proporcionais a 2, 4 e 6.

9. REGRA DE TRÊS SIMPLES E REGRA DE TRÊS COMPOSTA

Regra de três simples
A regra de três simples é um método prático usado para resolver problemas do dia a dia, que envolvam duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Exemplo: Um automóvel percorreu uma determinada distância em 3 horas, com uma velocidade média de 80 km/h. Se a velocidade média fosse de 100 km/h, em quanto tempo o automóvel percorreria esta mesma distância?

Para facilitar a resolução, usaremos o sistema de setas. Veja a seguir como proceder:
1° passo: Identifique as grandezas, seus valores e unidades de medida;
2° passo: represente-as, conforme esquema abaixo. Coloque o ‘x’ no valor procurado;

Tempo (horas)	velocidade (km/h)
3	80
x	100

3° passo: Coloque a primeira seta na grandeza aonde tem o ‘x’, voltada para ele;

Tempo (horas)	velocidade (km/h)
↓ 3	80
x	100

4° passo: Faça a interpretação das grandezas, verificando se são diretamente proporcionais (GDP) ou inversamente proporcionais (GIP). Caso sejam GDP, a seta fica no mesmo sentido. Se forem GIP, as setas ficam em sentido oposto.

No problema, temos que, se dobrarmos a velocidade média (160 km/h), o tempo reduzirá pela metade (1,5 horas). Logo, as grandezas são inversamente proporcionais e as setas ficam em sentidos opostos.

Tempo (horas)	velocidade (km/h)
3	80
x	100

5° passo: Monte uma proporção, sendo a primeira razão formada pela grandeza que contém o ‘x’ na ordem em que aparecem (numerador e denominador). Na segunda razão, deve observar se são GDP (mantém a ordem em que aparecem) ou GIP (invertem a ordem).

No caso do problema, como temos GIP, a primeira razão será $\frac{3}{x}$ e a segunda, invertendo as posições, $\frac{100}{80}$.

Assim, $\frac{3}{x} = \frac{100}{80}$. Aplicando a propriedade fundamental das proporções, obtemos:

$x \times 100 = 3 \times 80$
$100x = 240$
$x = \frac{240}{100} = 2{,}4$
Resposta: 2,4 horas ou 2 horas e 24 minutos.

Aplicações:

1. Luciana pretende fazer um churrasco em comemoração à sua colação de grau. Ela ganhou um patrocínio para a compra da carne no valor de R$ 624,00. O menor preço que conseguiu no quilograma da carne preferida foi R$ 32,00. Então, decidiu que o número de pessoas convidadas vai depender da quantidade de carne comprada, considerando 300 gramas de carne por pessoa. Sendo assim, quantos foram os convidados para a festa de Luciana?

Resolução:
Como são 624 reais e o quilograma da carne custa 32 reais, então, serão 624 : 32 = 19,5 kg ou 19.500 g de carne.
Por outro lado, se dobramos a quantidade carne, dobramos também a quantidade de pessoas, ou seja, 300 g, uma pessoa, 600 g, duas pessoas, e assim por diante. Logo, as grandezas são diretamente proporcionais.
Segue, portanto, que:

Carne (em g)	Número de pessoas
300	1
19.500	x

$\frac{1}{x} = \frac{300}{19.500} \Rightarrow x \times 300 = 1 \times 19.500$
$300x = 19.500$
$x = \frac{19.500}{300} = 65$

Resposta: 65 pessoas

Regra de três composta
O processo usado para resolver problemas que envolvem mais de duas grandezas, direta ou inversamente proporcionais, é chamado de **regra de três composta**.

Para resolver problemas que tratam da regra de três composta, utilizaremos os procedimentos da regra de três simples, observando, no entanto, que serão mais de duas grandezas. Neste caso, para sabermos se são GDP ou GIP, faremos a interpretação de duas em duas grandezas, utilizando sempre aquela que contém a pergunta do problema, ou seja, o ‘x’.

Depois, montamos uma equação, onde no primeiro membro fica a razão correspondente a grandeza que contém a pergunta do problema (‘x’), e no segundo membro, teremos um produto das razões das outras grandezas, observadas se são GDP ou GIP.

Aplicações:

1. (DANTE-2015) Para cobrir o piso de um galpão, foram necessárias 750 peças de cerâmica de 45 cm de comprimento por 8 cm de largura. Quantas peças de 40 cm de comprimento por 7,5 cm de largura serão necessárias para cobrir um piso cuja área é o dobro da anterior?

Resolução:
As grandezas envolvidas no problema são: quantidade de peças de cerâmica, área da peça de cerâmica e área do piso.
As áreas das cerâmicas são: 45 x 8 = 360 cm^2 e 40 x 7,5 = 300 cm^2.
Área do piso da sala: 750 x 360 = 270.000 cm^2
Área do novo piso: 540.000 cm^2 (dobro da anterior).

Grandezas: quantidade de peças e área da peça de cerâmica – Supondo que a área do piso seja a mesma, dobrando a área da peça de cerâmica, a quantidade de peças reduz pela metade. Logo, essas grandezas são inversamente proporcionais (setas em sentidos opostos)

Grandezas: quantidade de peças e área do piso – Supondo que a área da peça de cerâmica seja a mesma, dobrando a área do piso, a quantidade de peças também dobrará. Logo, temos grandezas diretamente proporcionais (setas no mesmo sentido).

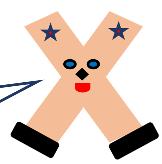
Quantidade de peças de cerâmicas	Área da peça de cerâmica (em cm²)	Área do piso (em cm²)
750	360	270.000
X	300	540.000

Assim, temos que: $\frac{750}{x} = \frac{300}{360} \times \frac{270.000}{540.000}$.

$\frac{750}{x} = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{750}{x} = \frac{5}{12}$

5 x x = 750 x 12
5x = 9.000
x = $\frac{9.000}{5} = 1.800$

Note que:
$$\frac{300}{360} = \frac{300:60}{360:60} = \frac{5}{6}$$
$$\frac{270.000}{540.000} = \frac{1}{2}$$



Resposta: 1.800 peças.

Reflexão do autor:
Diversas situações do dia a dia podem ser traduzidas e resolvidas por meio da regra de três simples ou composta. Habilidades na resolução de problemas que tratam

desse assunto, são constantemente exigidas em concursos, vestibulares e ENEM. Importante destacar que os conceitos aqui apresentados representam uma ferramenta de auxílio na aprendizagem dessa temática. Existem outros métodos e técnicas, podendo, inclusive, utilizar-se apenas do cálculo mental com uma boa dose de interpretação e raciocínio lógico.

ATIVIDADES XIII

60. (DANTE-2015) Lucimar tem uma corda para varal e vai dividi-la em pedaços, todos de mesmo comprimento. Se cada pedaço tiver 4 metros, ele obterá 18 pedaços. E, se cada pedaço tiver 6 metros, quantos pedaços ele obterá?

61) (DANTE-2015) Com 6 folhas de papel de seda, Ademir fez 8 pipas iguais. Quantas pipas iguais a essa ele pode fazer com 9 folhas de papel de seda?

62) (ENEM 2020) Uma torneira está gotejando água em um balde com capacidade de 18 litros. No instante atual, o balde se encontra com ocupação de 50% de sua capacidade. A cada segundo caem 5 gotas de água da torneira, e uma gota é formada, em média, por 5×10^{-2} mL (0,05 mL) de água. Quanto tempo, em hora, será necessário para encher completamente o balde, partindo do instante atual?

63) (GIOVANNI JÚNIOR-2018) Um filtro de ar retém 0,7 grama de poeira para cada 100 m^3 de ar filtrado. Quantos gramas de poeira são retidos para 15 000 m^3 de ar filtrado?

64) (GIOVANNI JÚNIOR-2018) Com certa quantidade de arame pode-se fazer uma tela de 50 m de comprimento por 1,20 m de largura. Aumentando a largura em 1,80 m, qual será o comprimento de outra tela feita com a mesma quantidade de arame usado na tela anterior?

65) Uma fábrica produz 5.400 metros de um tecido com 90 cm de largura em 50 minutos. Mantendo o mesmo ritmo de produção, em quanto tempo, essa fábrica produzirá 2.025 metros desse tecido com 120 cm de largura?

66) (BIANCHINI-2015) Nove amigos foram acampar por 6 dias. Para isso, levaram alimento suficiente, calculando 4 refeições diárias. Se chegassem mais 3 amigos e o grupo fizesse 3 refeições diárias, a quantidade de alimento que levaram inicialmente seria suficiente para quanto tempo?

67) (GIOVANNI JÚNIOR-2018) Em uma fábrica de chocolates, trabalham 21 funcionários na produção. Juntos, eles fazem, ao longo da jornada de trabalho de 6 h diárias, 420 barras de chocolate. Próximo de datas comemorativas, como Páscoa, Dia dos Namorados e Natal, a fábrica costuma aumentar a jornada de trabalho para 8 h/dia e faz novas contratações, pois tem como meta a produção de 960 barras de chocolate por dia. Quantos funcionários precisam estar na produção para que essa meta seja atingida?

68) (ÊNIO SILVEIRA-2015) Em uma disputa de tiro, uma catapulta, operando com 6 baterias de 15 minutos cada uma, lança 300 pratos de barro. Quantos pratos essa catapulta lançará com 10 baterias de 12 minutos cada?

69) (DANTE-2015) Uma máquina, trabalhando durante 6 minutos, produz 80 peças. Se for usada uma máquina com o dobro de potência, em quanto tempo ela produzirá

120 peças? (Sugestão: use1 para a potência da primeira máquina e 2 para a da segunda).

70) (ÊNIO SILVEIRA-2015) Dez guindastes móveis levam 18 dias de 8 horas de trabalho para carregar 200 contêineres em um navio. Quantos desses contêineres serão carregados em 15 dias, por 6 desses guindastes, funcionando 6 horas por dia?

10. PORCENTAGEM

Problema: Uma empresa tem 80 funcionários. Com dificuldades financeiras, resolveu demitir 20 deles. Qual o percentual de funcionários demitidos?

A razão entre os que serão demitidos e o total de funcionários é $\frac{20}{80}$ ou $\frac{20:20}{80:20} = \frac{1}{4}$ (um em cada quatro funcionários serão demitidos).

De forma equivalente, $\frac{1}{4} = \frac{1*25}{4*25} = \frac{25}{100}$. Isso significa que num grupo de 100 funcionários, 25 seriam demitidos, ou seja, 25%.

Razões de denominador 100, são chamadas de **razões centesimais**, **taxas percentuais** ou simplesmente de **porcentagens**.

Essas porcentagens podem ser representadas pelo numerador seguido do símbolo **%**, que significa: ‘por cento’, mas, também pode vir em forma decimal.

Exemplos:

8% = $\frac{8}{100}$ = 0,08

37% = $\frac{37}{100}$ = 0,37

0,5% = $\frac{0,5}{100}$ = 0,005

250% = $\frac{250}{100}$ = 2,5

Assim, para se calcular, por exemplo, 8% de R$ 200,00, podemos proceder de duas formas:

1ª) 8 % de 200 = $\frac{8}{100}$ x 200 = $\frac{1.600}{100}$ = 16.

2ª) 8% de 200 = 0,08 x 200 = 16.

Resposta: R$ 16,00

As porcentagens estão presentes em quase todas as atividades da sociedade. Algumas palavras como aumento, desconto, lucro, prejuízo, empréstimo, financiamento, dentre outras, comumente estão relacionadas com porcentagens.

Aqui, iremos trabalhar com a representação decimal. Diante disso, é importante a utilização de uma calculadora.

Aplicações:

1. Se num produto que custava R$ 85,00 um cliente pagou R$ 72,25, qual foi o percentual de desconto concedido pela loja?

Resolução:
Vamos resolver esse problema de dois modos.

1º) usando regra de três
O desconto obtido, em reais, foi de 85 – 72,25 = 12,75.

Valor (R$)	(%)
85	100
12,75	x

$\frac{100}{x} = \frac{85}{12,75}$ ⇒ 85x = 1.275 ⇒ x = $\frac{1.275}{85}$ = 15%

2º) A razão entre o valor pago e o valor original é dada por: $\frac{72,25}{85}$. Efetuando a divisão, obtemos: $\frac{72,25}{85} = 0,85$ ou 85%. Ou seja, o valor pago corresponde a 85% do valor original. Logo, o desconto foi de 15%.

Ou, 85 – 72,25 = 12,75 e $\frac{12,75}{85} = 0,15 = 15\%$.

2. Após um aumento de 22%, Túlio passou a receber um salário de R$ 1.903,81. Qual era o salário de Túlio antes desse aumento?

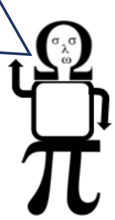
Resolução:
R$ 1.903,81 = 100% (salário antigo) + 22% (sobre o salário antigo), temos:

Valor (R$)	(%)
1.903,81	122
x	100

$\frac{1.903,81}{x} = \frac{122}{100}$ ⇒ 122x = 190.381
x = $\frac{190.381}{122} = 1.560,5$

Resposta: R$ 1.560,50

Cuidado!
Você não deve simplesmente retirar 22% de R$ 1.903,81. Afinal, os 22% foram aplicados sobre o salário antigo.
Observe, por exemplo, que:
100 + 20% de 100 = 120
120 – 20% de 120 = 96



3. Na figura abaixo, tem-se parte dos dados de um boleto bancário. Seu pagamento foi realizado no dia 26/10/2021, seguindo as instruções prescritas no mesmo. Qual foi o valor desse pagamento?

BANCO FH	
PAGAR EM QUALQUER BANCO ATÉ O VENCIMENTO	**VENCIMENTO: 18/10/2021**
	VALOR: 250,00
APÓS O VENCIMENTO: - PAGAR SOMENTE NO BANCO FH. - COBRAR MULTA DE 5% ACRESCIDO DE JUROS DE R$ 0,42 POR DIA DE ATRASO.	

Resolução:
Primeiro calculamos a multa: 5% de 250 = 0,05 x 250 = 12,5.
Observe que foram 8 dias de atraso: 8 x 0,42 = 3,36.
Logo, 250 + 12,5 + 3,36 = 265,36.
Resposta: R$ 265,86.

4. (IEZZI-2013/Adaptado) A primeira fase de um vestibular foi feita por 48.000 candidatos, dos quais 65% não passaram para a fase seguinte. Entre os que fizeram a segunda fase, 68% não foram aprovados. Qual o percentual e a quantidade de candidatos que conseguiram ingressar na faculdade por meio desse exame?

Resolução:
1ª fase: Reprovados: 65% e Aprovados: 35%
2ª fase: Reprovados 68% e Aprovados: 32%

Assim, 32% dos 35% que fizeram a segunda fase foram aprovados, ou seja, 32% de 35% = 0,32 x 0,35 = 0,112 ou 11,2%.
Segue que: 11,2% de 48.000 = 0,112 x 48.000 = 5.376.

Resposta: 5. 376 candidatos.

Reflexão do autor:
Parte importante da Matemática aplicada na vida cotidiana, as porcentagens contribuem com a interpretação e intervenção nos mais variados setores da sociedade, contribuindo com a leitura e análises estatísticas, na compra e venda de mercadorias e no mercado financeiro. Sua correta compreensão e utilização, é, pois, uma necessidade em uma sociedade cada vez mais capitalista.

ATIVIDADES IX

71. (ENCCEJA 2019) Uma confecção vende camisetas por R$ 30,00 cada peça. Oferece um desconto de 20% sobre esse preço a uma loja que as compra em grande quantidade. Essa loja revende as camisetas pelo preço de R$ 50,00 cada. Na última remessa, porém, o desconto oferecido pela confecção foi de 5% sobre o preço de cada camiseta. O lojista, visando manter o que lucrava com cada peça anteriormente, deverá reajustar o preço de revenda. Com base nas condições apresentadas, qual deve ser o novo preço de revenda, em real, de cada camiseta?

72) (UF-GO) O sr. Manuel contratou um advogado para receber uma dívida cujo valor era de R$ 10 000,00. Por meio de um acordo com o devedor, o advogado conseguiu receber 90% do total da dívida. Supondo que o sr. Manuel pagou ao advogado 15% do total recebido, quanto dinheiro lhe restou?

73) (UF-CE) O preço de um aparelho elétrico com um desconto de 40% é igual a R$ 36,00. Calcule, em reais, o preço desse aparelho elétrico, sem esse desconto.

74) (IEZZI-2013) O dono de uma padaria comprou um pacote de chocolate com 100 unidades pagando R$ 120,00. Se ele vender 40 unidades com uma margem de contribuição unitária igual a 50% do custo unitário, e 60 unidades com uma margem de 30% sobre o custo unitário, qual a receita de venda das 100 unidades?

75) (UF-PE) Em um exame de vestibular 30% dos candidatos eram da área de Ciências Sociais. Dentre esses candidatos, 20% optaram pelo curso de Administração. Indique a porcentagem, relativa ao total de candidatos, dos que optaram por Administração.

76) (U.F. Uberlândia-MG) No mês de agosto, Pedro observou que o valor da sua conta de energia elétrica foi 50% superior ao valor da sua conta de água. Em setembro,

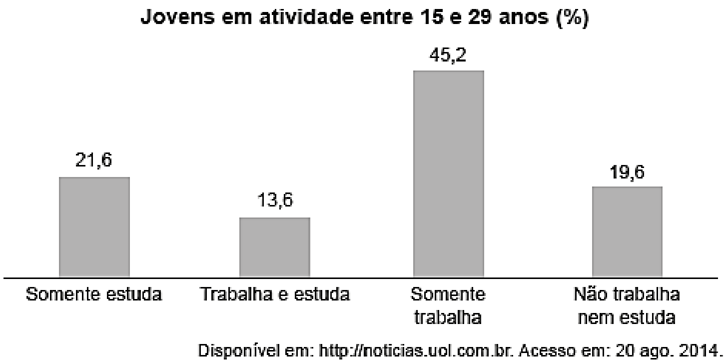
tanto o consumo de energia elétrica quanto o de água, na residência de Pedro, foram iguais aos consumos do mês de agosto. Porém, como as tarifas de água e energia elétrica foram reajustadas em 10% e 20%, respectivamente, Pedro desembolsou R$ 20,00 a mais do que em agosto para quitar as duas contas. Quanto Pedro pagou de energia elétrica no mês de setembro?

77) (DANTE-2015) Em uma promoção, o preço de um liquidificador foi reduzido de R$ 76,00 para R$ 57,00. De quanto por cento foi a redução?

78) (UnB-DF) Em uma cidade, há 10.000 pessoas aptas para o mercado de trabalho. No momento, apenas 7.000 estão empregadas. A cada ano, 10% das que estão empregadas perdem o emprego, enquanto 60% das desempregadas conseguem se empregar. Considerando que o número de pessoas aptas para o mercado de trabalho permaneça o mesmo, calcule o percentual de pessoas empregadas daqui a 2 anos. Despreze a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

79) (IEZZI-2013) Um fogão que custava R$ 500,00 sofreu um aumento de 8%. Em razão da falta de demanda, o vendedor resolveu oferecer um desconto de 8% sobre o preço com acréscimo. Qual o preço final do fogão, após o acréscimo seguido de desconto?

80) (ENEM 2020) A Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (Pnad) é uma pesquisa feita anualmente pelo IBGE, exceto nos anos em que há Censo. Em um ano, foram entrevistados 363 mil jovens para fazer um levantamento sobre suas atividades profissionais e/ou acadêmicas. Os resultados da pesquisa estão indicados no gráfico abaixo:



De acordo com as informações dadas, o número de jovens entrevistados que trabalha é:

(A) 114 708. (B) 164 076. (C) 213 444. (D) 284 592. (E) 291 582.

11. MÉDIA ARITMÉTICA

A média aritmética é uma medida de tendência central que faz parte dos estudos da Estatística, possuindo uma vasta aplicação no nosso cotidiano.

Em muitas escolas, por exemplo, o aluno para ser aprovado em uma disciplina no final do ano letivo, precisa atingir uma nota anual mínima, obtida através da média aritmética das notas bimestrais. Seguindo esse raciocínio, veja o modelo a seguir.

Na escola 'X', o aluno estará aprovado em uma disciplina se obter uma nota anual igual ou maior que 6. Durante um ano letivo, Diana conseguiu, em Matemática, no 1°, 2°, 3° e 4° bimestres, respectivamente, 5,2; 7,0; 5,5 e 6,8. Pergunta-se: Diana foi aprovada ou reprovada em Matemática?

Para determinar a nota média anual, devemos somar as quatro notas obtidas durante o ano e dividir o resultado por 4. Assim, temos: $\frac{5{,}2 + 7{,}0 + 5{,}5 + 6{,}8}{4} = \frac{24{,}5}{4} = 6{,}125$.
Neste caso, como $6{,}125 > 6$, então, Diana foi aprovada em Matemática.

De outra forma, podemos entender que 6,125 representa a média aritmética das notas de Diana durante o ano letivo em Matemática.

Dado o seguinte conjunto de valores: $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n}$. Dizemos que a média aritmética ($\overline{x}$) desse conjunto de **n** valores é dada por:

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}}{\boldsymbol{n}}}$$

Quando se tem elementos repetidos dentro desse conjunto de valores, ao invés de escrevê-lo repetidamente, podemos, simplesmente, multiplicar este elemento pelo número de vezes em que ele aparece (chamamos de frequência absoluta).

Exemplo: Na cidade de Palmas, durante um determinado dia do ano, foram realizadas medições da temperatura de hora em hora, durante 24 horas, conforme dados (em °C) a seguir: 32°, 32°, 32°, 32°, 32°, 32°, 32°, 33°, 33°, 34°, 34°, 34°, 34°, 36°, 36°, 38°, 38°, 38°, 37°, 37°, 37°, 35°, 35°, 35°. Qual foi a temperatura média durante esse ciclo de 24 horas?

Resolução:
Vamos organizar os dados em uma tabela, para facilitar a compreensão:

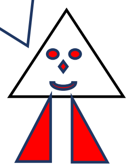
Temperatura (em °C)	Frequência absoluta
32	7
33	2
34	4
35	3
36	2
37	3
38	3
Total	24

Segue que,

$\bar{x} = \frac{7*32+2*33+4*34+3*35+2*36+3*37+3*38}{24} = \frac{828}{24} = 34{,}5.$

Esse método é chamado de **média aritmética ponderada.**

Assim, a temperatura média, neste período, foi de 34,5 °C.



Aplicações:

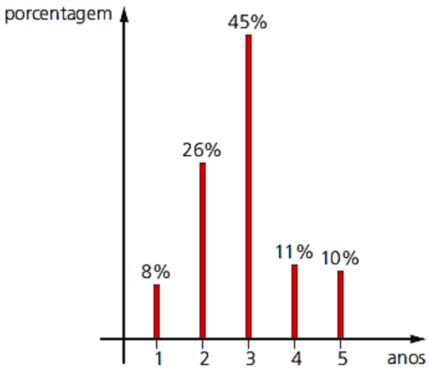
1. Em uma rodada do campeonato brasileiro de futebol com 20 times, duas partidas terminaram sem gols. Nas 8 partidas restantes, duas tiverem 3 gols em cada, em quatro ocorreram 2 gols em cada e em outras duas partidas houveram 5 gols em cada. Qual foi a média de gols dessa rodada?

Resolução:
Número de gols por partida: Duas de 0 gols, duas de 3 gols, quatro de 2 gols e 2 partidas de 5 gols. Logo,

$$\bar{x} = \frac{2*0+2*3+4*2+2*5}{10} = \frac{24}{10} = 2{,}4$$

Resposta: A média da rodada foi de 2,4 gols por partida.

2. (IEZZI-2013) O gráfico seguinte informa a distribuição do tempo de serviço (em anos) dos funcionários de uma pequena empresa:



Qual é o tempo médio de trabalho dos funcionários dessa empresa?

Resolução:
Vamos utilizar as porcentagens em decimais.
Observação: A soma das porcentagens é 100%, em decimal, 1.

$$\bar{x} = \frac{0{,}08*1+0{,}26*2+0{,}45*3+0{,}11*4+0{,}10*5}{0{,}08+0{,}26+0{,}45+0{,}11+0{,}10} = \frac{2{,}89}{1} = 2{,}89$$

Resposta: O tempo médio é de 2,89 anos.

3. (IEZZI-2013) A média aritmética de 15 números é 26. Retirando-se um deles, a média dos demais passa a ser 25. Qual foi o número retirado?

Resolução:
Seja S_1 a soma desses 15 números. Temos que: $\bar{x} = \frac{S_1}{15}$.
Então, $26 = \frac{S_1}{15} \Rightarrow S_1 = 390$.
Retirando um deles, restarão 14 números e a média cairá para 25. Assim, a soma desses 14 números será: S_2 =14 x 25 = 350.
Portanto, o número retirado foi: $S_1 - S_2 = 390 - 350 = 40$.

Resposta: 40.

Reflexão do autor:
Parte importante das noções básicas da Estatística, a média aritmética é uma medida de centralidade que permite, através de um único número, ter uma noção das características de um conjunto de números. Apesar de ser muito utilizada, nem sempre ela traduz da melhor forma a realidade, tendo em vista que um valor muito alto ou muito baixo em relação aos demais, promove uma distorção da média, fazendo com que não seja possível, através dela, traçar o perfil correto do grupo. Por isso, existem as outras medidas de tendência central, a moda e a mediana, além das medidas de dispersão, como variância e desvio padrão. Essas medidas são estudadas no ensino médio, porém, fica como sugestão de pesquisa.

ATIVIDADES X

81. (GIOVANNI JÚNIOR-2018) O quadro a seguir apresenta a altura dos jogadores de basquete do time do 9° ano do Colégio Y:

Nome	Artur	Bernardo	Fernando
Altura (em m)	1,65	1,69	1,79

Guilherme	Marcelo	Otávio	Wilson
1,75	1,63	1,69	1,76

Determine a altura média dos jogadores desse time.

82. Na tabela abaixo está representada os salários, em reais, dos funcionários de uma empresa:

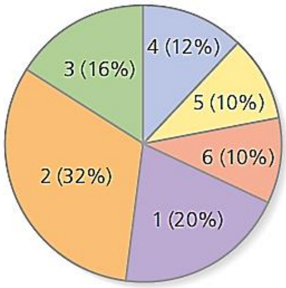
Salário (R$)	Número de funcionários
1.200,00	12
2.050,00	7
3.900,00	4
7.100,00	2

Qual o salário médio dos funcionários dessa empresa?

83. Num concurso, a prova escrita tem peso 3 e a prova prática tem peso 2. Qual é a média de um candidato que obteve nota 8 na prova escrita e nota 5 na prova prática?

84. (DANTE-2016) A média das idades dos 11 funcionários de uma empresa era de 40 anos. Um dos funcionários se aposentou com 60 anos, saindo da empresa. A média de idade dos 10 funcionários restantes passou a ser:
(A) 40 anos. (B) 39,8 anos. (C) 38,9 anos. (D) 38 anos. (E) 37,8 anos.

85. (Unicamp-SP) O gráfico a seguir, em forma de pizza, representa as notas obtidas em uma questão pelos 32.000 candidatos presentes à primeira fase de uma prova de vestibular. Ele mostra, por exemplo, que 32% desses candidatos tiveram nota 2 nessa questão:



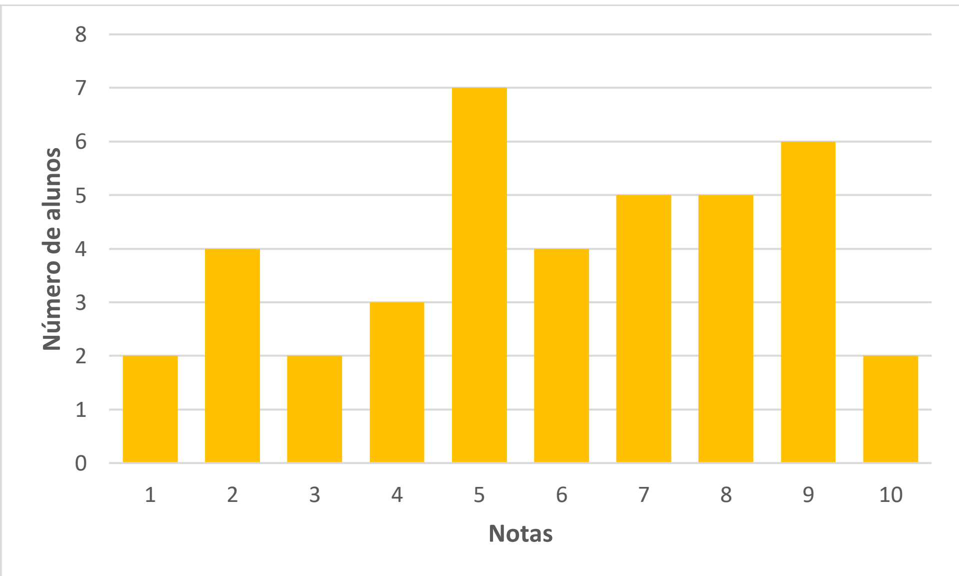
Pergunta-se: É possível afirmar que a nota média, nessa questão, foi menor ou igual a 2? Justifique sua resposta.

86. (IEZZI-2013) Um grupo de 20 nadadores, cuja média de altura é 1,88 m, está treinando para uma competição. Se um grupo de 7 atletas cuja média de altura é 1,92 m se juntar ao primeiro grupo, qual será a média de altura dos 27 atletas?

87. (IEZZI-2013) É comum encontrarmos produtos com conteúdo líquido menor que o declarado nas embalagens. Em uma pequena cidade, doces de leite são vendidos em copos de vidro em cujos rótulos consta a informação relativa ao "peso" de 200 g. Dois fabricantes, A e B, fornecem doces com conteúdo real médio de 190 g e 195 g, respectivamente. Um supermercado comprou um total de n copos (somadas as duas marcas) de doce de leite, e verificou-se que o conteúdo médio líquido do lote era 193,5 g. Determine o número de copos comprados de cada fabricante, sabendo que um deles vendeu 40 copos a mais que o outro.

88. Sabendo que a média aritmética dos números 7, x, y, 20, 33 e 11 é 15,5 e que o valor de y é igual a 120% do valor de x, determine a média aritmética dos valores de x e y.

89. Observe no gráfico a seguir uma representação para as notas de 40 alunos de uma turma de EJA do Segundo Segmento em Matemática. O desempenho nessa avaliação é considerado satisfatório se a média aritmética da turma for igual ou maior que 5. Neste caso, o desempenho da turma foi satisfatório ou insatisfatório? Justifique.



12. NOÇÕES DE PROBABILIDADE

Vamos considerar os contextos a seguir:

Problema 1: Ao todo, o estado do Tocantins possui 139 municípios. O Território da Cidadania Bico Do Papagaio - TO está localizado na região Norte e é composto por 25 municípios: Aguiarnópolis, Ananás, Angico, Araguatins, Augustinópolis, Axixá do Tocantins, Buriti do Tocantins, Cachoeirinha, Carrasco Bonito, Darcinópolis, Esperantina, Itaguatins, Luzinópolis, Maurilândia do Tocantins, Nazaré, Palmeiras do Tocantins, Praia Norte, Riachinho, Sampaio, Santa Terezinha do Tocantins, São Bento do Tocantins, São Miguel do Tocantins, São Sebastião do Tocantins, Sítio Novo do Tocantins e Tocantinópolis.
Disponível em: http://sit.mda.gov.br/download/caderno/caderno_territorial_022_Bico%20Do%20Papagaio%20-%20TO.pdf

Em uma urna são colocadas 139 bolinhas numeradas, distintamente, de 1 a 139. Cada bolinha corresponde a uma cidade do Tocantins. Sorteando, aleatoriamente, uma dessas bolinhas, qual a probabilidade de ela corresponder a um município que fica na região do Bico do Papagaio?

Problema 2: Um baralho comum possui 52 cartas, sendo 13 cartas de cada naipe (ouros, copas, paus e espadas). Após misturar todas as cartas do baralho, retira-se, aleatoriamente, uma carta. Qual a probabilidade de sair uma carta de paus?

Problema 3: Antes de iniciar uma partida de futebol, o juiz chama os capitães dos dois times para sortear quem inicia com a posse de bola. O vencedor começa no primeiro tempo e o perdedor, no segundo tempo. Para isso, o juiz usa uma moeda comum (cara/coroa). Joga-se a moeda o observa a face voltada para cima. Qual a probabilidade de sair cara?

Problemas como esses possuem algo em comum: não sabemos o que vai acontecer, ou seja, não temos como prever o resultado, no entanto, sabemos quais são as possibilidades de ocorrência, ou ainda, qual a chance de algo específico ocorrer. Estudos como estes fazem parte da **Teoria das Probabilidades**.

“A Teoria das Probabilidades estuda as leis que regem os fenômenos que dependem do acaso, ou seja, aqueles fenômenos cujos resultados não se podem prever. Nesse caso, interessam a essa teoria as experiências aleatórias, ou seja, aquelas cujo resultado é imprevisível, mesmo se forem repetidas sob as mesmas condições” (BIANCHINI, 2015).

“Chamamos de **experimentos aleatórios** aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza. Embora não saibamos qual o resultado que irá ocorrer num experimento, em geral conseguimos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que podem ocorrer. As variações de resultados, de experimento para experimento, são devidas a uma multiplicidade de causas que não podemos controlar, as quais denominamos acaso” (HAZZAN, 2013).

Em um experimento aleatório, existem dois conceitos fundamentais:

Espaço amostral: é o conjunto de todas os resultados possíveis de um experimento (representado pela letra ‘S’). Assim, n(S) representa o número de elementos desse conjunto espaço amostral.

Problema 1: n(S) = 139 municípios
Problema 2: n (S) = 52 cartas
Problema 3: n(S) = 2 (cara ou coroa)

Evento: é todo subconjunto do espaço amostral (representado pela letra 'E'). Neste caso, n(E), indica o número de elementos pertencentes ao evento.

Problema 1
Evento: sair um número correspondente a um município que fica na região do Bico do Papagaio. Segue que n(E) = 25 municípios.

Problema 2
Evento: sair uma carta de paus. Segue que n(E) = 13 cartas.

Problema 3
Evento: sair cara. Segue que n(E) = 1 (cara).

O cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento, é dado pela razão:

$$\boldsymbol{Probabilidade = \frac{n^{o}\ de\ casos\ favoráveis}{n^{o}\ casos\ possíveis} = \frac{n(E)}{n(S)}}$$

Problema 1: Probabilidade = $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{25}{139} \cong 0{,}18$ ou 18%.

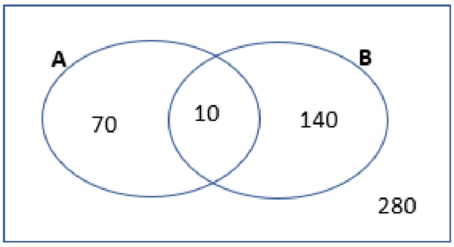
Problema 2: Probabilidade = $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ ou 25%

Problema 3: Probabilidade = $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ ou 50%

Aplicações:

1. (HAZZAN-2013) Em um grupo de 500 estudantes, 80 estudam Engenharia, 150 estudam Economia e 10 estudam Engenharia e Economia. Se um aluno é escolhido ao acaso, qual a probabilidade de que ele não estude Engenharia nem Economia?

Resolução:
Vamos usar o diagrama de Venn.
A: Conjunto dos alunos que estudam Engenharia.
B: Conjunto dos alunos que estudam Economia.



n(S) = 500 estudantes
n(E) = 280 alunos que não estudam Engenharia nem Economia.
Logo, Probabilidade = $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{280}{500} = \frac{14}{25} = 0{,}56$ ou 56%

2. Em uma caixa estão contidas 2 bolas vermelhas, 3 azuis e 5 amarelas. Retirando-se ao acaso, uma dessas bolas, qual a probabilidade de não ser azul?

Resolução:
O número de elementos do espaço amostral é n(S) = 10.
A probabilidade de sair uma bola azul é de $\frac{3}{10}$.
Assim, a probabilidade de não sair uma bola azul é de: $1 - \frac{3}{10} = \frac{10-3}{10} = \frac{7}{10}$.
Resposta: $\frac{7}{10}$ ou 70%.

3. No lançamento de dois dados comuns (faces numeradas de 1 a 6), um vermelho e outro azul, qual a probabilidade da soma das faces voltadas para cima ser:
a) um número par;
b) 7.

Resolução:
Vamos determinar o conjunto espaço amostral

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1 ,1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2 ,1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3 ,1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4 ,1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5 ,1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6 ,1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Note que n(S) = 36.
a) Evento E_1: soma par.
E_1 = {(1, 1); (1, 3); (1, 5); (2, 2); (2, 4); (2. 6); (3, 1); (3, 3); (3, 5); (4, 2); (4, 4); (4, 6); (5, 1); (5, 3); (5, 5); (6, 2); (6, 4); (6, 6)}
n(E_1) = 18
Probabilidade = $\frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ ou 50%.

b) Evento E_2: soma 7
E_2 = {(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1)}.
n(E_2) = 6
Probabilidade = $\frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ou, aproximadamente, 16,7%.

Reflexão do autor:
A história da Teoria das Probabilidades tem suas raízes nos jogos de azar. Porém, foi muito importante no desenvolvimento da sociedade, com aplicações em diversas áreas como Estatística, Engenharia, Física, Biologia, Economia, entre outras. A probabilidade tem papel preponderante nas análises de previsões e tomadas de decisões. Diante disso, é um dos componentes da Matemática indispensáveis nos estudos e formação dos estudantes. Aqui foram apresentados apenas conceitos básicos e introdutórios, uma parte mais aprofundada da Teoria das Probabilidades é estudada no ensino médio e em alguns cursos de graduação.

ATIVIDADES XI

90. Retirando-se uma carta aleatoriamente de um baralho comum, qual a probabilidade de ela ser um ás?

91. Na tabela abaixo está contida as informações acerca dos alunos de uma turma:

	Usa óculos	Não usa óculos
Menino	5	15
Menina	3	17

Sorteando, ao acaso, um aluno dessa turma, qual a probabilidade de que ele use óculos?

92. Lança-se, simultaneamente, duas moedas comuns, uma de R$ 0,50 e outra de R$ 1,00, e observa-se as faces voltadas para cima. Qual a probabilidade de que tenha saído duas caras?

93. (IEZZI-2013) Um número é escolhido ao acaso entre os 20 inteiros, de 1 a 20. Qual a probabilidade de o número escolhido ser primo?

94. Jogando 2 dados distintos, qual a probabilidade de se obter soma menor ou igual a 4?

95. (FGV-RJ) Em um grupo de 300 pessoas sabe-se que:
• 50% aplicam dinheiro em caderneta de poupança.
• 30% aplicam dinheiro em fundos de investimento.
• 15% aplicam dinheiro em caderneta de poupança e fundos de investimento simultaneamente.
Sorteando uma pessoa desse grupo, a probabilidade de que ela não aplique em caderneta de poupança nem em fundos de investimento é:
(A) 0,05 (B) 0,20 (C) 0,35 (D) 0,50 (E) 0,65

96. (ANDRINI-2012) Numa urna há 9 bolas: três vermelhas, quatro amarelas e duas azuis. Retira-se uma primeira bola, que não é amarela. Ao retirar uma segunda bola ao acaso, qual é a probabilidade de ela ser amarela?

97. (HAZZAN-2013) Um colégio tem 1 000 alunos. Destes:
200 estudam Matemática
180 estudam Física
200 estudam Química
20 estudam Matemática, Física e Química
50 estudam Física e Química
70 estudam somente Química
50 estudam Matemática e Física.
Um aluno do Colégio é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de:
a) ele estudar só Matemática?
b) ele estudar só Física?
c) ele estudar Matemática e Química?

98. Considere todos os números naturais de 3 algarismos distintos que é possível formar com os algarismos 0, 1, 3, 4, 7, 8 e 9. Escolhendo um deles ao acaso, qual é a probabilidade de seja um número par?

ANEXOS

ANEXO I: Tabuada da Multiplicação

1 x 1 = 1 1 x 2 = 2 1 x 3 = 3 1 x 4 = 4 1 x 5 = 5 1 x 6 = 6 1 x 7 = 7 1 x 8 = 8 1 x 9 = 9	2 x 1 = 2 2 x 2 = 4 2 x 3 = 6 2 x 4 = 8 2 x 5 = 10 2 x 6 = 12 2 x 7 = 14 2 x 8 = 16 2 x 9 = 18	3 x 1 = 3 3 x 2 = 6 3 x 3 = 9 3 x 4 = 12 3 x 5 = 15 3 x 6 = 18 3 x 7 = 21 3 x 8 = 24 3 x 9 = 27	4 x 1 = 4 4 x 2 = 8 4 x 3 = 12 4 x 4 = 16 4 x 5 = 20 4 x 6 = 24 4 x 7 = 28 4 x 8 = 32 4 x 9 = 36	5 x 1 = 5 5 x 2 = 10 5 x 3 = 15 5 x 4 = 20 5 x 5 = 25 5 x 6 = 30 5 x 7 = 35 5 x 8 = 40 5 x 9 = 45
6 x 1 = 6 6 x 2 = 12 6 x 3 = 18 6 x 4 = 24 6 x 5 = 30 6 x 6 = 36 6 x 7 = 42 6 x 8 = 48 6 x 9 = 54	7 x 1 = 7 7 x 2 = 14 7 x 3 = 21 7 x 4 = 28 7 x 5 = 35 7 x 6 = 42 7 x 7 = 49 7 x 8 = 56 7 x 9 = 63	8 x 1 = 8 8 x 2 = 16 8 x 3 = 24 8 x 4 = 32 8 x 5 = 40 8 x 6 = 48 8 x 7 = 56 8 x 8 = 64 8 x 9 = 72	9 x 1 = 9 9 x 2 = 18 9 x 3 = 27 9 x 4 = 36 9 x 5 = 45 9 x 6 = 54 9 x 7 = 63 9 x 8 = 72 9 x 9 = 81	10 x 1 = 10 10 x 2 = 20 10 x 3 = 30 10 x 4 = 40 10 x 5 = 50 10 x 6 = 60 10 x 7 = 70 10 x 8 = 80 10 x 9 = 90

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro. **Praticando matemática** / Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos. – 3. ed. renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2012. – (Coleção praticando matemática).

ALVES, Luciana e Sá; ROCHA, Gelson. **O novo sistema internacional de unidades (SI)**. Revisão: Aline Marques Rodrigues; Diagramação: Marco Kothe. Edição: Sociedade Brasileira de Metrologia, 2019. Disponível em: <https://metrologia.org.br/wpsite/wp-content/uploads/2019/07/Cartilha_O_novo_SI_29.06.2029.pdf>. Acesso em: 08 de out. 2021.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**/ 8. ed. — São Paulo : Moderna, 2015. Obra em 4 v. para alunos de 6° ao 9° ano.

BRASIL**. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira | Inep**. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais>. Acesso em: 07 de out. 2021.

DANTE. Luiz Roberto**. Projeto Teláris: matemática: ensino fundamental 2** / 2. ed. – São Paulo: Ática, 2015.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações: ensino médio** /-- 3. ed. - São Paulo: Ática, 2016.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática** - 6° ao 9° ano: anos finais (coleção). — 4. ed. — São Paulo: FTD, 2018.

HAZZAN, Samuel. Fundamentos de matemática elementar, 5: combinatória, probabilidade / Samuel Hazzan. — 8. ed. — São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 11: matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva / Gelson Iezzi, Samuel Hazzan, David Mauro Degenszajn. — 9. ed. — São Paulo: Atual, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto de. Matemática realidade & tecnologia: 8° ano: ensino fundamental: anos finais / Joamir Roberto de Souza. – 1. ed. – São Paulo: FTD, 2018.

OBMEP. **Portal Da OBMEP. Portal da Matemática**. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/site/index?a=1> Acesso em: 10 de jul. 2021.

OBMEP. **Provas e Soluções**. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/site/index?a=1>. Acesso em: 12 de ago. 2021.

PRAVALER. **Simulado Encceja Online: Matemática e suas Tecnologias**. Disponível em <https://www.pravaler.com.br/testes/simulado-encceja-online-matematica-e-suas-tecnologias/>. Acesso em: 07 de out. 2021.

SABER MATEMÁTICA. Disponível em: <https://sabermatematica.com.br>. Acesso em: 11 de out. 2021.

SILVEIRA, Ênio. Matemática: compreensão e prática / Ênio Silveira. — 3. ed. Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano. São Paulo: Moderna, 2015.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática realidade & tecnologia: 8° ano :ensino fundamental: anos finais** / Joamir Roberto de Souza. – 1. ed. – São Paulo: FTD, 2018.

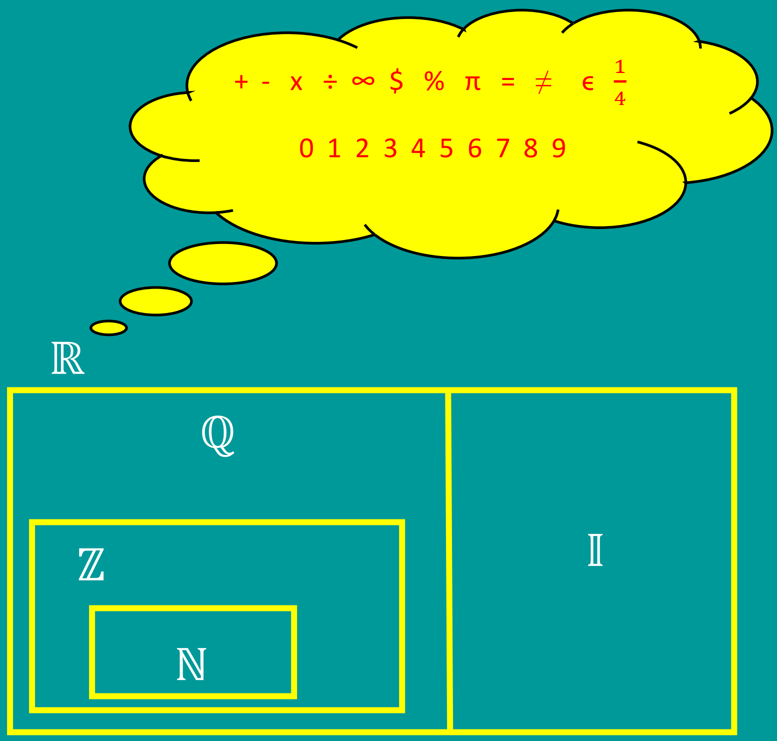
UFSC. **Inclusão para a vida Matemática**. Pré-vestibular da UFCS. Unidade 1: Aritmética Básica.

RESPOSTAS DAS ATIVIDADES

1.
a) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
b) {0, 2}
c) {4, 6, 7, 8, 9}
c) ∅
d) {0, 2, 4, 7, 9}
2. 69 pessoas
3. 5 pessoas
4. 11 elementos
5. 2 palestrantes
6. 38 alunos
7. a) 101 b) 443
8. B
9. a) 5.040 b) 1.400
10. 80 segundos
11. 30 metros
12. 47
13. 180 minutos ou 3 horas.
14.
a) não, MDC (25,30) = 5
b) sim; MDC (40, 21) = 1
c) sim; MDC (7, 11) = 1
d) sim; MDC (28, 3) = 1
15. 21 anos
16. daqui a 12 horas, ou seja, às 19 hs.
17. 3 cm; 2700 cubos.
18. 90
19. C
20. C
21. R$ 140,00.
22. D
23. 7 horas.
24. Um cartão cujo resultado da operação é um número inteiro positivo (9 em 16).
25. 100
26. 7/30
27. 11/4
28. B
29. 1/6
30. 6 saquinhos
31. 15/4 ou $3\frac{3}{4}$
32. C
33. Pedrinho e José comeram a mesma quantidade de pizza.
34. A
35. D
36. 48 litros
37.
a) 1/6 (real racional não inteiro)
b) $\sqrt{70}$ (real irracional)
c) 3,5 (real racional não inteiro)
d) – 2 (real racional inteiro)

e) π (real irracional)
f) $2\frac{1}{3}$ ou 2,333... (real racional não inteiro)
38. R$ 140,95
39. Loja 2
40. A
41. C
42. R$ 2.239,65
43. C
44. C
45. R$ 840,00 ; R$ 0,70
46. 2,40 m^3
47. A
48. C
49. 30
50. 3,4 cm
51. E
52. 12.000 m^2
53. B
54. a = 3, b = 6, c = 6. Inversamente proporcionais.
55. João: R$ 14.400,00; Maria: R$ 18.000,00; Pedro: R$ 20.400,00 e Ricardo: R$ 25.200,00.
56. 12 minutos
57. 4 mulheres e 12 homens.
58. C
59. 72 cm, 36 cm e 24 cm.
60. 12 pedaços
61. 12 pipas
62. 10 horas
63. 105 g
64. 20 m
65. 25 minutos
66. 6 dias
67. 36 funcionários
68. 400 pratos
69. 4,5 min ou 4 min e 30 segundos
70. 75 contêineres
71. R$ 54,50
72. R$ 7.650,00
73. R$ 60,00
74. R$ 165,60
75. 6%
76. R$ 90,00
77. 25%
78. 84,3%
79. R$ 496,80
80. C
81.1,71 m
82. R$ 2.342,00
83. 6,8
84. D
85. Sim; foi 2,9.
86. 1,89 m
87. Do fabricante A: 30 copos; Do fabricante B: 70 copos.
88. 11

89. Satisfatório ($\bar{x} = 5{,}9$).
90. $\frac{1}{13}$
91. $\frac{1}{5}$ ou 20%
92. 1/4 ou 25%
93. 2/5 ou 40%
94. 1/6
95. C
96. 1/2 ou 50%
97. a) 7/100 b) 1/10 c) 1/10
98. 4/9



+ - x ÷ ∞ $ % π = ≠ ϵ 1/4
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
ℝ
ℚ
ℤ
ℕ
𝕀