MATEMÁTICA FINANCEIRA
Livro de Bolso

Armando Oscar Cavanha Filho

“O problema começa quando consideramos a verdade independente de nossa consciência.”

Albert Einstein
Reflexões filosóficas, pág. 39, Alvorada

NOTA

Nem o autor nem a editora se responsabilizam pelo acerto ou erro em transações comerciais que tenham por ventura tomado por base os conceitos, fórmulas e *software* desta publicação. Qualquer assunto da obra só pode ser utilizado com a competente observação e conferência por parte de profissional habilitado em economia ou ciência correlata.

Armando Oscar Cavanha Filho

ÍNDICE

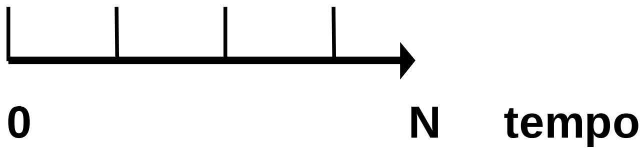
1 - INTRODUÇÃO

A Matemática Financeira tem base nos conceitos de fluxo monetário, tempo e equivalência financeira. Trata-se da relação entre valores financeiros e o tempo a que tais valores estão associados.

O fluxo monetário caracteriza-se por conviverem, distribuídos na escala de tempo, entradas e saídas de valores monetários, tantas quantas houverem, representando eventos e suas dimensões financeiras. Isto quer dizer que estão distribuídos pagamentos e recebimentos ao longo do tempo, que não podem ser somados, diminuídos, multiplicados ou divididos, sem que se utilize de recursos que compensem as distâncias entre tais valores na escala de tempo em que se encontram.

Com respeito ao TEMPO, pode-se afirmar que não existe valor monetário isoladamente, mas sempre correlacionado a um determinado tempo ou período. Um valor monetário nominal hoje é diferente deste mesmo valor nominal daqui a dois anos. Exemplo: Seria o mesmo, em termos econômicos, ter $ 1000 hoje, comparando-se em ter $ 1000 daqui a

cinco anos ? Ou ainda, qual o valor que uma pessoa está disposta a pagar hoje, para receber $ 10 000 daqui a 20 anos ?



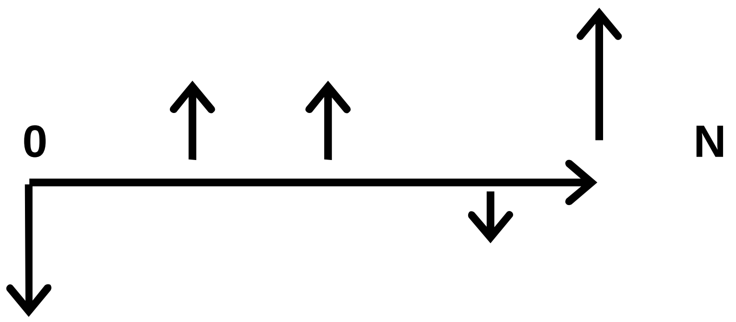
Na escala de tempo são considerados o momento zero (0), que pode ser a data de início de um projeto ou de uma aplicação financeira inicial, bem como o tempo final (N), quando finda o projeto ou a aplicação. Trata-se de uma seqüência de períodos iguais, repetidos N vezes. A unidade de medida pode ser qualquer unidade de tempo, como segundos, minutos, horas, dias, semanas, meses, anos, décadas, séculos, etc. As unidades mais comuns são meses e anos, nos cálculos financeiros.

Por equivalência financeira entende-se que fluxos de valores diferentes, com igual número de períodos ou não, podem ter o mesmo valor equivalente, ou seja, podem ter a mesma RESPOSTA FINANCEIRA.

Outro conceito, não menos importante, é o dos JUROS, que representam uma parcela, em valor, referente ao uso de um recurso monetário deslocado no tempo, remunerando este deslocamento. A TAXA DE JUROS corresponde ao fator percentual que, aplicado ao valor monetário em questão, resulta na parcela de juros. Juros ocorrem de rendimentos de capital, ou advindos de empréstimos ou investimentos empresariais.

Capital é o conjunto de bens à disposição do sistema econômico para uso na capacidade produtiva da natureza (energia, terra, matéria-prime) e do trabalho humano, traduzido para dinheiro, o que permite equalizar as diferentes formas de capital em sistemas comparáveis.

Para efeito desta publicação, será utilizada a seguinte convenção:



- **eixo horizontal = eixo do tempo, de zero (tempo hoje) a N (tempo final)**
- **flechas para cima = entradas de valores, valores algébricos positivos, receitas**
- **flechas para baixo = saídas de valores, valores algébricos negativos, despesas**
- **P = capital, valor atual, valor hoje, valor no tempo zero, principal**
- **S = valor futuro, valor final, montante**
- **R = elemento da série uniforme, prestação, remuneração por período**
- **N = número de períodos, tempo**
- **i = taxa de juros por período de capitalização (valor decimal)**
- **i% = taxa de juros por período de capitalização (valor percentual)**
- **j = taxa de juros acumulada em um período total N (valor decimal)**
- **j% = taxa de juros acumulada em um período total N (valor percentual)**

As entradas e saídas de valores, receitas e despesas, são considerados sempre ao final de cada período citado (final do dia, semana, mês, ano, etc.), a menos que o contrário seja citado.

Os capitais podem ser do tipo instantâneo (capital em pé) ou não instantâneo (capital deitado). O primeiro se dá em um ponto determinado e os cálculos são feitos pela computação discreta dos juros. O segundo ocorre quando a receita ou pagamento se distribui ao longo do período, como os ganhos de uma loja comercial todos os dias, quando a unidade de tempo de cálculo é, por exemplo, mensal. Neste, a computação dos juros é do tipo contínua. Estes dois modelos estão associados à diferença de como se mede e como o fenômeno ocorre.

Esta publicação não tem a pretensão de esgotar o assunto, mas abordar as questões mais utilizadas da Matemática Financeira, limitadas à experiência profissional do autor.

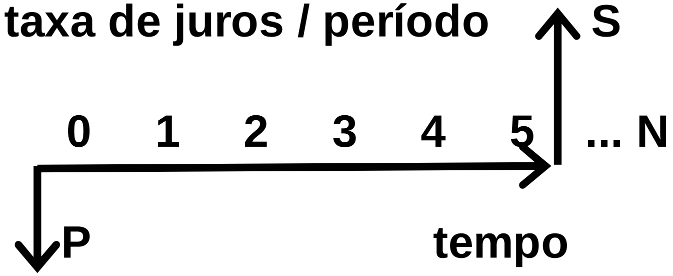
2 - Pagamento Único

Quando o fluxo financeiro é constituído de apenas uma entrada e uma saída de valores, diz-se que se trata de um sistema de pagamento único.

Na figura seguinte está representado, esquematicamente, um sistema de pagamento único. Há quatro variáveis, que são: P, S, N, I. As variáveis encontram-se relacionadas por uma expressão matemática de tal forma que, desde que sejam conhecidas três delas, pode-se calcular a faltante.

$$S = P \times (1 + i)^{N}$$

i = taxa de juros / período



2.1-Valor Futuro

Qual o valor que se obtém da aplicação de um capital de $ 100 000 em 12 meses, sendo a taxa de juros igual a 1% ao mês ?

S = P (1 + i / 100) ^ N

S = 100000 x (1 + 1/100) ^ 12 = 112682,50

2.2 - Valor Atual

Qual o valor que se deve investir hoje para receber $ 200 000 daqui a 12 meses, sabendo que a taxa de juros é de 2% ao mês ?

$$P = \frac{S}{(1 + i)^N}$$

$$P = \frac{200000}{(1 + 2/100)^{12}} = 157698,63$$

2.3 - Tempo de Capitalização

Qual o tempo necessário para se obter o valor de $ 200 000 , se forem aplicados $ 100 000, a uma taxa de juros de 3% ao mês ?

$$N = \frac{\text{LOG}(S / P)}{\text{LOG}(1 + i/100)}$$

$$N = \frac{\text{LOG}(200\,000 / 100\,000)}{\text{LOG}(1 + 3/100)} = 23{,}45 \text{ meses}$$

2.4 - Taxa de juros

Qual a taxa de juros de um investimento onde são aplicados $ 100 000 hoje e se obtém o dobro desse valor após 12 meses ?

$$i = (S / P)^{1/N} - 1$$

$$i = (200\,000 / 100\,000)^{1/12} - 1 = 0{,}059 = 5{,}95\% \text{ ao mês}$$

3 - Série Uniforme de Pagamentos

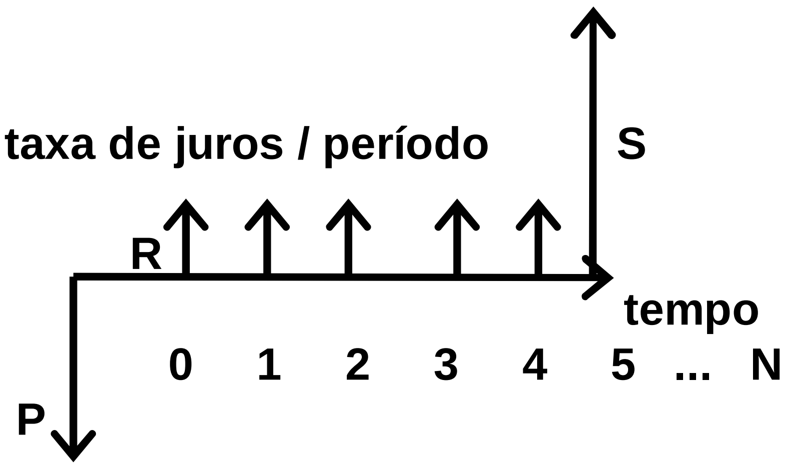
Ocorre quando o fluxo financeiro é constituído de uma série de valores iguais, distribuídos ao longo do tempo; sendo a distribuição uniforme e o intervalo de tempo constante entre os valores consecutivos.

Na figura seguinte está representado, esquematicamente, um sistema de série uniforme de pagamentos. Há quatro variáveis, que são: P ou S, N, I, R. As variáveis encontram-se relacionadas por expressões matemáticas de tal forma que, desde que sejam conhecidas três delas, pode-se calcular a quarta.

$$S = \frac{R \times ((1 + i)^{N} - 1)}{I}$$

$$P = \frac{R \times (1 - (1 + i)^{-N})}{i}$$

i = taxa de juros / período



3.1 - Formação de Capital

Se forem aplicados, mensalmente, $ 20 000, sendo a taxa de juros de 1% ao mês, qual o valor obtido ao final de um ano ?

$$S = \frac{R \times ((1 + i/100)^{N} - 1)}{i/100}$$

$$S = \frac{20\,000 \times ((1 + 1/100)^{12} - 1)}{1/100} = 253\,650{,}06$$

3.2 - Valor Atual

Qual o valor, à vista, de um objeto vendido em 12 prestações de $ 20, com a taxa de juros / período de 1% ?

$$P = \frac{R \times \left(1 - \left(1 + i/100 \right)^{-N} \right)}{i/100}$$

$$P = \frac{20 \times \left(1 - \left(1 + 1/100 \right)^{-12} \right)}{1/100} = 225{,}10$$

3.3 - Elemento da Série

Qual a prestação a ser paga por um empréstimo de $ 100 000, quando a taxa de juros é de 10% ao mês e o tempo para pagamento é de 12 meses ?

$$R = \frac{P \;\; i / 100}{1 - (1 + i / 100)^{-N}}$$

$$R = \frac{100\,000 \times 10 / 100}{1 - (1 + 10 / 100)^{-12}} = 14\,676{,}33$$

3.4 - Tempo da Série

Qual o tempo necessário para se pagar um empréstimo de $ 100 000, a uma taxa de juros por período de 10% ao mês, sendo que a prestação é de $ 20 000 / mês ?

$$N = \frac{\text{LOG } (R \,/(\, R - P \times i \,/100))}{\text{LOG } (\, 1 + i \,/\, 100\,)}$$

$$N = \frac{\text{LOG } (20000 \,/(\, 20000 - 100000 \times 10 \,/100))}{\text{LOG } (\, 1 + 10 \,/\, 100\,)} =$$

=7,27

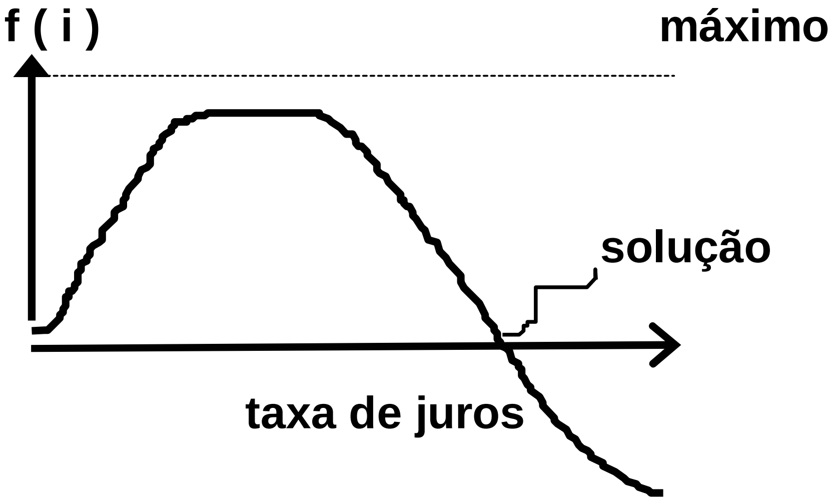
obs: nesse cálculo é necessário que $R > P \times i$, ou seja, que o produto do capital pela taxa de juros seja inferior ao valor do elemento da série

3.5 - Taxa de Juros da Série

Qual a taxa de juros cobrada em um empréstimo de $ 100 000, para 12 prestações de $ 20 000 por mês ?

$$f(i) = R \times (1 - (1 + i)^{-N}) - P \times i$$

a solução é o valor de i que anula f (i)



O método de aproximações sucessivas permite ajustar gradualmente o valor de i, até que se encontre aquele que anule a função implícita apresentada.

i	* f(i)	observações
10	3627.38	primeira tentativa
20	-2243.13	segunda tentativa
15	1261.85	está entre 10 e 20

18	-744.39	segue aproximando
17	-39.48	....
16	630.74	....
16.5	300.22	....
16.9	29.16	....
16.95	-5.11	....
16.93	8.61	....
16.94	1.75	valor aceitável

$$* \ f(i) = 20\,000 \times \left(1 - (1 + i/100)^{-12}\right) - 100000 \times i/100$$

O valor de i = 16,94 conduz a função f(i) a valores reduzidos aceitáveis. Programas simples ou planilhas eletrônicas permitem realizar esses cálculos com rapidez e precisão.

3.6 - Taxa de Juros da Série - método Baily

Qual a taxa de juros cobrada em um empréstimo de $ 100 000, para 12 prestações de $ 20 000 por mês ?

Primeiramente calcula-se h:

$$h=[(N R / P)^{(2 / (N + 1))}] -1$$

Substituindo-se h na equação seguinte:

$$i = \frac{12 - (N - 1) h}{12 - 2 (N - 1) h} h$$

$$h = [(12 \times 20000 / 100000)^{(2 / (12 + 1))}] -1 = 0.1441$$

$$i = \frac{12 - (12 - 1)\ 0.1441}{12 - 2\ (12 - 1)\ 0.1441}\ 0.1441 = 0{,}1699$$

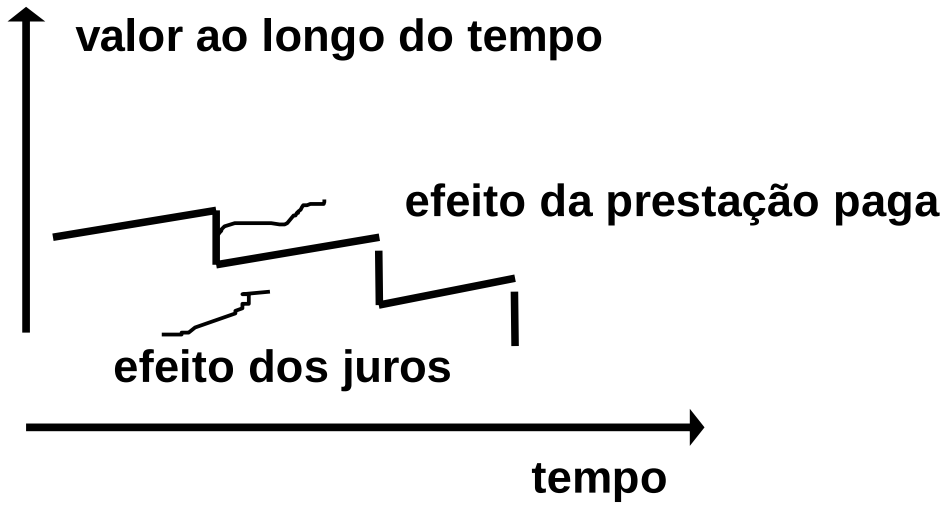
= 16,69%

Obtém-se um valor aproximado do resultado correto, muitas vezes aceitável, a depender da precisão que se deseja.

3.7 - Saldo devedor

A série uniforme de pagamentos pode representar um esquema de pagamentos de prestações para liquidar uma dívida, dados uma taxa de juros por período e o número de períodos.

Como calcular a dívida após pagos k períodos ?



As linhas inclinadas são a acumulação da dívida ao longo do tempo, enquanto as linhas verticais são as quedas da dívida em função dos pagamentos. O valor de cada pagamento deve ser superior ao aumento periódico da dívida, caso contrário não haveria quitação da mesma.

Assim a dívida D no período k é:

$$D(k) = \frac{P\left((1 + i/100)^{N} - (1 + i/100)^{k} \right)}{(1 + i/100)^{N} - 1}$$

Qual o saldo devedor no terceiro mês de um esquema de pagamentos para financiamento de um veículo de valor à vista de $ 20 000, a serem pagos em 10 meses, taxa de juros de 9% ao mês?

$$D(k) = \frac{P\left((1 + i/100)^{N} - (1 + i/100)^{k} \right)}{(1 + i/100)^{N} - 1}$$

$$D(3) = \frac{20000((1 + 0{,}09)^{10} - (1 + 0{,}09)^{3})}{(1 + 0{,}09)^{10} - 1}$$

D(3)= 15684.70

Portanto a dívida no 3 mês será de 15 684,70.

3.8 - Amortização de prestação

A diferença entre os saldos devedores de dois períodos consecutivos produz a amortização da dívida no período.

$$A(p, p-1) = D(p) - D(p-1)$$

Qual a amortização produzida pelas prestações 3 e 4 em um esquema financeiro para financiamento de um veículo de valor à vista de $ 20 000, a serem pagos em 10 meses, taxa de juros de 9% ao mês?

$$D(k) = \frac{P\left((1 + i/100)^{N} - (1 + i/100)^{k} \right)}{(1 + i/100)^{N} - 1}$$

dívida no período 3:

$$D(3) = \frac{20000\left((1 + 0{,}09)^{10} - (1 + 0{,}09)^{3} \right)}{(1 + 0{,}09)^{10} - 1}$$

D(3)= 15684.70

dívida no período 4:

$$D(4) = \frac{20000((1 + 0,09)^{10} - (1 + 0,09)^{4})}{(1 + 0,09)^{10} - 1}$$

D(4)= 13979.92

A = 15684.70-13979.92 = 1704,77

A amortização é de 1704,77.

3.9 - Valor presente de uma perpetuidade

Supondo que o tempo tende ao infinito:

P = R / i

Qual o valor equivalente de uma perpetuidade mensal de $ 100, sendo i = 0,05 ?

P = 100 / 0,05 = 2000

É equivalente receber $ 2000 a vista ou $ 100 por mês, eternamente.

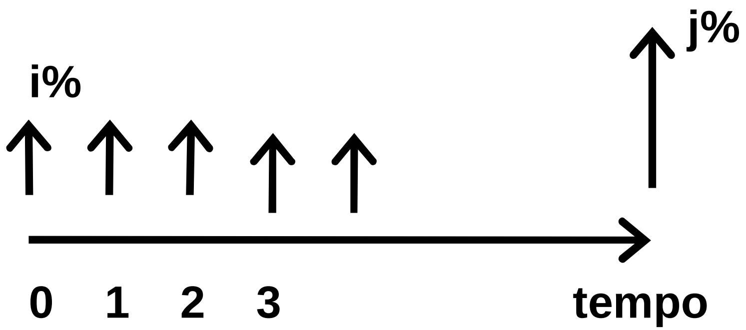
4 - Juros

Devem estar explícitas as formas de juros dos sistemas financeiros, se capitalizados de período em período e se aplicados no início ou final de cada período de contabilização.

Quando se informa que a dívida de um empréstimo é de $ 100 000 e a taxa de juros é de 10% ao mês, qual a dívida após 4 meses ?

tempo	dívida	juros	% aumento
0	100000	0	0
1	110000	10000	10
2	121000	21000	21
3	133100	33100	33.1
4	146410	46410	46.41

A dívida será de $ 146 410, após 4 meses.



$$j\% = \left(\left(1 + i\% / 100 \right)^{N} - 1 \right) \times 100$$

4.1 - Taxa Acumulada

Determinar a taxa de juros acumulada em 12 meses, para uma taxa mensal de 10%.

$$j\% = \left(\left(1 + i\% / 100 \right)^{N} - 1 \right) \times 100$$

$$j\% = \left(\left(1 + 10/100\right)^{12} - 1 \right) \times 100 = 213{,}84\%$$

4.2 - Taxa por Período

Seja a taxa de juros acumulada em um ano de 440%, qual a taxa mensal ?

$$i\% = \left(\left(J/100 + 1 \right)^{(1/N)} - 1 \right) \times 100$$

$$i\% = \left(\left(440/100 + 1 \right)^{(1/12)} - 1 \right) \times 100 = 15{,}08\%$$

4.3 - Tempo da Série

Qual o tempo necessário para que haja equivalência entre uma taxa de juros acumulada de 213,8% e uma taxa de juros por período de 10% ?

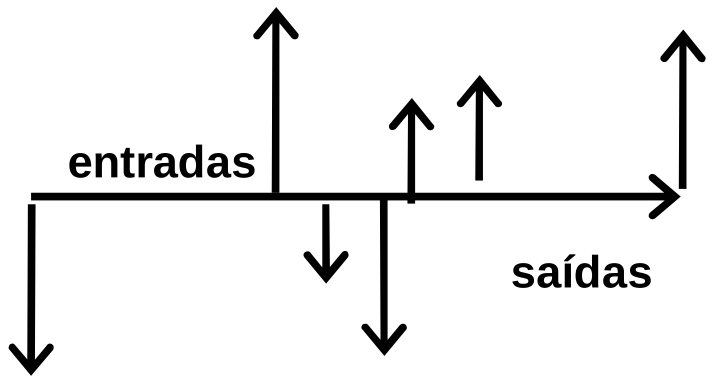
$$N = \frac{\mathrm{LOG}\,(J/100 + 1)}{\mathrm{LOG}\,(i/100 + 1)}$$

$$N = \frac{\mathrm{LOG}\,(213{,}8/100 + 1)}{\mathrm{LOG}\,(10/100 + 1)} = 11{,}99$$

5 - Série não Uniforme

Nem sempre o fluxo financeiro se dá por séries uniformes de pagamentos, ou seja, por valores iguais distribuídos em intervalos de tempos idênticos.

Nas situações mais comuns do mercado são encontradas séries não uniformes, ou melhor, com valores diferentes colocados em tempos distintos (intervalos irregulares).



5.1 - Valor Equivalente no Tempo

Dado o seguinte fluxo, qual o seu valor equivalente no décimo período de tempo, sendo a taxa de juros de 10% por período?

Tempo	1	2	4	7	10
valor	10	20	10	30	5

tempo	valor	equivalencia no tempo 10
1	10	23.57
2	20	42.87
4	10	17.71
7	30	39.93
10	5	5
		Soma=129.09

A solução indicada compõe-se da transferência de cada parcela para a sua equivalente no período 10, através de:

$$P(10) = P \times (1 + 10 / 100)^{(10 - t)}$$

(sendo P o valor da parcela e t o tempo indexado desta parcela)

Cada valor é deslocado, através da diferença de número de períodos entre onde se encontra e para onde deverá ir, com base na taxa de juros. Quando todas as parcelas estão indexadas ao período desejado, podem ser somadas algebricamente, resultando em um valor apenas, que equivale a série anteriormente dada. O valor de 129,09, no exemplo, equivale a série dada.

Em um outro fluxo, com entradas e saídas de valores (identificadas através dos sinais) como apresentado, qual seria o seu valor equivalente, dados a mesma taxa e o mesmo tempo destino 10 ?

Tempo	1	2	4	7	10
valor	10	-20	-10	30	-5

$$P(10) = P \times (1 + 10 / 100)^{(10 - t)}$$

tempo	valor	equivalente tempo 10
1	10	23.57
2	-20	-42.87
4	-10	-17.71
7	30	39.93
10	-5	-5
		soma=-2.07

O valor -2.07 equivale a série dada.

5.2 - Taxa de Juros da Série

Dados uma série não uniforme e um valor presente que equivale a série dada, pode-se calcular a taxa de juros que equilibra o sistema.

Dada a série:

tempo:	**1**	**3**	**4**	**7**
valor:	**20**	**30**	**40**	**100**

e sendo o capital (valor presente) igual a $ 150, qual a taxa de juros ?

É importante citar que, para haver solução, a soma algébrica dos valores (independente de juros ou tempo) deve ser superior ao principal (valor presente).

20 + 30 + 40 + 100= 190 deve ser maior que 150

por tentativas

tempo	**1.00**	**3.00**	**4.00**	**7.00**	
valor	**20.00**	**30.00**	**40.00**	**100.00**	
					soma
f(i) p/ i=10	**18.18**	**22.54**	**27.32**	**51.32**	**119.36**
F(i) p/ i=20	**16.67**	**17.36**	**19.29**	**27.91**	**81.23**
F(i) p/ i=5	**19.05**	**25.92**	**32.91**	**71.07**	**148.94**
F(i) p/ i=4	**19.23**	**26.67**	**34.19**	**75.99**	**156.08**
F(i) p/ i=4,8	**19.08**	**26.06**	**33.16**	**72.02**	**150.33**

Portanto, quando i é igual a aproximadamente 4,8%, a função se aproxima do valor 150 e atinge o seu objetivo.

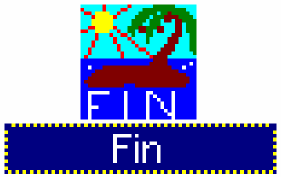
6 - Software FIN

INSTALAÇÃO

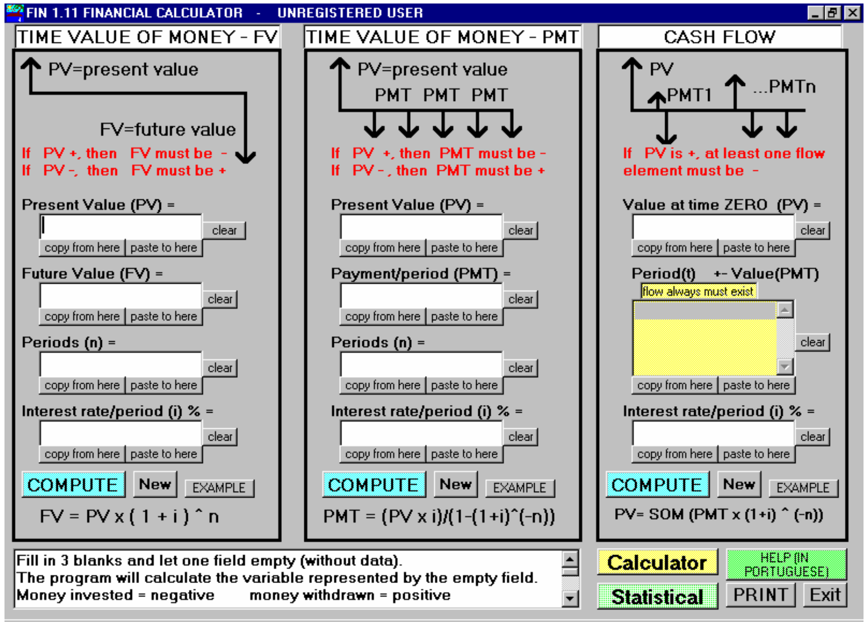
Para instalar o programa FIN for WINDOWS, basta colocar o disco 1 no drive disponível, dentro do ambiente WINDOWS, selecionar o arquivo INSTALL (SETUP) e ordenar sua execução.

UTILIZAÇÃO

Após instalado, o programa FIN se apresentará com a seguinte identificação no ambiente WINDOWS:



Após acionado o início do programa, a seguinte tela se apresenta:



Há três segmentos na tela, independentes, que tratam de:

PAGAMENTO ÚNICO, segmento mais a esquerda

SÉRIE UNIFORME DE PAGAMENTOS, segmento central

FLUXO NÃO UNIFORME, segmento mais a direita

PAGAMENTO ÚNICO:

Há quatro campos de dados, dos quais 3 deles devem ser preenchidos, na busca do faltante.

exemplos:
1-Qual o valor que se obtém da aplicação de 100.000, em 12 meses, sendo a taxa de juros igual a 1 % ao mes ?

(preencher os campos com os dados fornecidos e pressionar COMPUTE para obter a resposta)

resposta: 112.682,50

2-Qual o valor que se deve investir hoje para receber 200.000 daqui a 12 meses, sabendo-se que a taxa de juros é de 2% ao mes (capitalização mes a mes) ?

(preencher os campos com os dados fornecidos e pressionar COMPUTE para obter a resposta)

resposta: 157.698,63

3-Qual o tempo necessário para se obter o valor de 200.000, se forem aplicados 100.000, a uma taxa de juros de 3% ao mes (capitalização mes a mes) ?

(preencher os campos com os dados fornecidos e pressionar COMPUTE para obter a resposta)

resposta: 23,45 meses

4-Qual a taxa de juros de um investimento onde são aplicados 100.000 hoje e se obtém o dobro deste capital, após 12 meses (capitalização mes a mes) ?

(preencher os campos com os dados fornecidos e pressionar COMPUTE para obter a resposta)

resposta: 5,95 % ao mes

SÉRIE UNIFORME DE PAGAMENTOS

Há quatro campos de dados, dos quais 3 deles devem ser preenchidos, na busca do faltante.

exemplos:
1-Qual a prestação a ser paga por um empréstimo de 100.000, quando a taxa de juros é de 10 % ao mes e o tempo para pagamento é de 12 meses ?

(preencher os campos com os dados fornecidos e pressionar COMPUTE para obter a resposta)

resposta: 14.676,33

2-Qual o valor a, à vista, de um objeto vendido em 12 prestações de 20, com a taxa de juros/período de 1% ?

(preencher os campos com os dados fornecidos e pressionar COMPUTE para obter a resposta)

resposta: 225,10

3-Qual o tempo necessário para se pagar um empréstimo de 100.000, a uma taxa de juros/período de 10% ao mes, sendo que a prestação é de 20.000/ mes ?

(preencher os campos com os dados fornecidos e pressionar COMPUTE para obter a resposta)

resposta: 7,27 períodos

4-Qual a taxa de juros cobrada em um empréstimo de 100.000, para 12 prestações de 20.000 por mes ?

(preencher os campos com os dados fornecidos e pressionar COMPUTE para obter a resposta)

resposta: I= 16,94 % ao mes

FLUXO NÃO UNIFORME

Há três campos de dados, dos quais o maior deles, *tempo +- valor*, deve obrigatoriamente ser preenchido com a série tempo valor disponível. Deixa-se em branco o campo da taxa de juros, para que a mesma seja calculada, ou o campo do valor presente, para que este seja encontrado.
O campo *tempo +- valor* deve ter a forma seguinte:
1 333
2 555
6 -234

ou seja, o tempo do fluxo, seguido de no mínimo um espaço em branco, e o valor conjugado. Como exemplo, na primeira linha poderiam estar no

primeiro mes um recebimento de 333, e na terceira linha um pagamento de 234.

exemplos:

1-Dado o seguinte fluxo, qual o seu valor equivalente no décimo período de tempo, sendo a taxa de juros de 10% ?

tempo:	**1**	**2**	**4**	**7**	**10**
valor:	**10**	**20**	**10**	**30**	**5**

após o cálculo do valor presente de 49,7724, no segmento da direita, captura-se este valor com CTRL + INS, repassa-se ao campo valor presente do segmento da esquerda e busca-se o valor futuro para o décimo mes:

(preencher os campos com os dados fornecidos e pressionar COMPUTE para obter a resposta)

resposta: 129,1

2-Dada a série:

tempo:	**1**	**3**	**4**	**7**
valor:	**20**	**30**	**40**	**100**

e sendo o capital 150, qual a taxa de juros ?

(preencher os campos com os dados fornecidos e pressionar COMPUTE para obter a resposta)

resposta: 5% ao período

observação: dentro do fluxo, caso haja valores de sentido contrário aos demais, utilizar o sinal - (negativo) antecedendo o valor (sem espaço entre o sinal e o valor).

Há duas ferramentas de auxílio, uma estatística e uma calculadora. É possível calcular uma projeção de dados na ferramenta estatística ou realizar um cálculo pela calculadora, retornando com o resultado para o programa FIN, seguindo- se com os cálculos financeiros.

7 - Critérios para decisão econômica

A Análise Econômica de Projetos pode ser vista como sendo o conjunto de Comparações entre Alternativas Econômicas. Os projetos possuem um lado técnico, de como fazer o produto (ou serviço) e um lado econômico, que traduz em valores as diversas grandezas físicas transformadas (valoradas) para dinheiro.

É nececessário reconhecer claramente as opções, descrevendo-as, separadamente, sendo que as decisões são baseadas nas respostas esperadas de cada projeto. Mesmo quando se tem, aparentemente, um único projeto, já existe uma alternativa natural, que é a comparação com o custo do dinheiro.

É importante que se verifique qual o ponto de vista que prevalece na decisão, se do governo, dos consumidores, dos acionistas, etc., uma vez que a depender do enfoque que se dê ao projeto, suas respostas têm efeitos diferentes e abordagens distintas.

Um termo largamente utilizado na análise de projetos é o da Taxa Mínima de Atratividade, que é a taxa de juros mínima aceita para que o projeto se torne viável (sob o ponto de vista escolhido), normalmente igual ou superior ao custo do dinheiro no mercado. Os recursos a serem aplicados em projetos, próprios ou de terceiros, como não são suficientes para todos os projetos físicos existentes (é o que se verifica na prática das empresas), devem contemplar apenas uma parte de uma carteira de projetos, hierarquizados por algum dos critérios existentes, de forma a permitir aos decisores a escolha dos projetos que melhor se adequem às suas expectativas. Caso permaneçam existindo projetos ainda com taxas de atratividade superiores ao custo do dinheiro, há a opção de obter financiamento para estes projetos, ou alavancar parcerias de negócio, dividindo investimentos e receitas.

Busca-se transformar as diversas forças e características de um projeto em valores monetários, em uma mesma base de tempo ou taxa, permitindo as comparações entre as diferenças. Isto implica em levar em conta ou não os custos passados de um projeto, pois, em alguns casos, o que já se gastou não possui valor residual algum (é como se fosse iniciar o

projeto todo novamente, a partir do nada) e, assim, podendo não fazer parte do cálculo. É preciso analisar caso a caso, visto que em outras ocasiões os valores passados fazem parte do contexto de análise e podem ser considerados na avaliação (custos da informação, inclusive "do que não se deve fazer").

Adicionalmente, as questões de financiamento e captação de recursos não são comumente colocadas em mesmos fluxos que os projetos de realização física (produtivos), pois podem induzir a perda de nitidez e não serem corretamente avaliados (a sua viabilidade própria).

Os critérios de decisão econômica e as medidas de lucratividade devem permitir comparações entre projetos, através do "rankeamento" dos mesmos, baseados nos valores representativos indexados ao tempo. Os projetos devem ter, fundamentalmente, alinhamento estratégico com as orientações da corporação, coisa de difícil transformação em números, mas de aderência indispensável.

Na composição das carteiras de projeto, priorizados, devem ser contemplados os grupos de projetos de curto prazo e os de longo prazo. A idéia é que o equilíbrio planejado entre os dois grupos permita que os de

curto prazo possam servir de alavanca e sustentação dos fluxos de manutenção financeira e sobrevivência da corporação, visando propiciar a sustentação dos projetos de longo prazo (possivelmente de rentabilidades superiores).

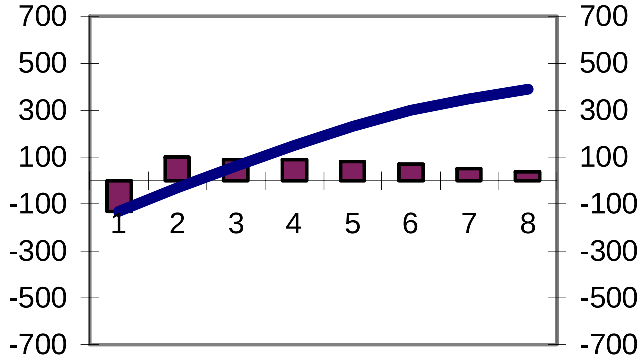
Tempo de Retorno de Investimento

Tempo de Retorno de um investimento é a quantidade de tempo necessária para que o sistema recupere o seu investimento e retorne o fluxo de caixa cumulativo para positivo. É considerado comum aquele projeto que necessita de um investimento inicial para começar a atividade, antes de qualquer receita, portanto caracterizando um fluxo inicial negativo.

O Tempo de Retorno é um indicador que não pode ser utilizado isoladamente, pois não caracteriza o projeto em si, sua magnitude ou sua rentabilidade. Porém, tem interesse na informação do tempo de recuperação de capital, variável considerada fundamental na análise de carteira de projetos de investimento.

Exemplo: Um investimento em uma fábrica requer dispêndios iniciais altos e, após os primeiros meses de trabalho, o fluxo de caixa é positivo e o capital é retornado ao investidor. Ver a tabela e o gráfico seguintes:

tempo	1	2	3	4	5	6	7	8
ponto $	-130	100	90	90	80	70	50	40
acumu$	-130	-30	60	150	230	300	350	390



As barras representam os valores a cada mês, enquanto a linha representa os valores acumulados do fluxo. Por volta do 2,5 mês, nesse exemplo, apresenta-se o ponto de inversão do fluxo, passando de negativo acumulado para positivo acumulado. Este valor de 2,5 meses é chamado de tempo de retorno de investimento. (fluxo puro, sem juros)

Para dois flluxos com todas as demais carecterísticas iguais, aquele com o menor tempo de retorno é mais atrativo economicamente.

Razão Lucro / Investimento

Outra medição comum, mas também limitada, é a relação entre o lucro e o investimento. Há duas formas utilizadas para este indicador:

$$\text{razão lucro / investimento} = \frac{\text{Receitas - Investimentos}}{\text{Investimentos}}$$

e

$$\text{*razão receita / investimento} = \frac{\text{Receitas}}{\text{Investimentos}}$$

***também chamado de alavancagem de projetos**

Em ambos os casos, tomam-se os valores acumulados de receitas e investimentos, somando-os algebricamente, sem levar em conta a indexação de tempo e taxa de juros. Portanto, trata-se de uma simplificação, mas bastante utilizada na prática do mundo das empresas. Esse indicador, conjugado com o anterior (tempo de retorno de investimento), dão uma idéia do estado do sistema, sua atratividade comparativa simplificada.

Exemplo: Uma empresa oferece os seguintes números para análise:

	projeto 1	projeto 2
receita	185 000	235 000
investimento	60 000	85 000

razões calculadas:

	projeto 1	projeto 2
lucro / investime	2,08	1,76

nto		
receita / investimento	**3,08**	**2,76**

Para efeito de comparação simplificada, apenas com este indicador, o projeto 1 produz efeitos mais atrativos que o de número 2.

Em uma comparação com a Física, esse indicador possuiria semelhanças com o rendimento mecânico, que envolve a razão entre as potências produzida e fornecida; ou ainda, no rendimento energético, que compara a energia recebida e a energia cedida para o trabalho mecânico.

Taxa Interna de Retorno

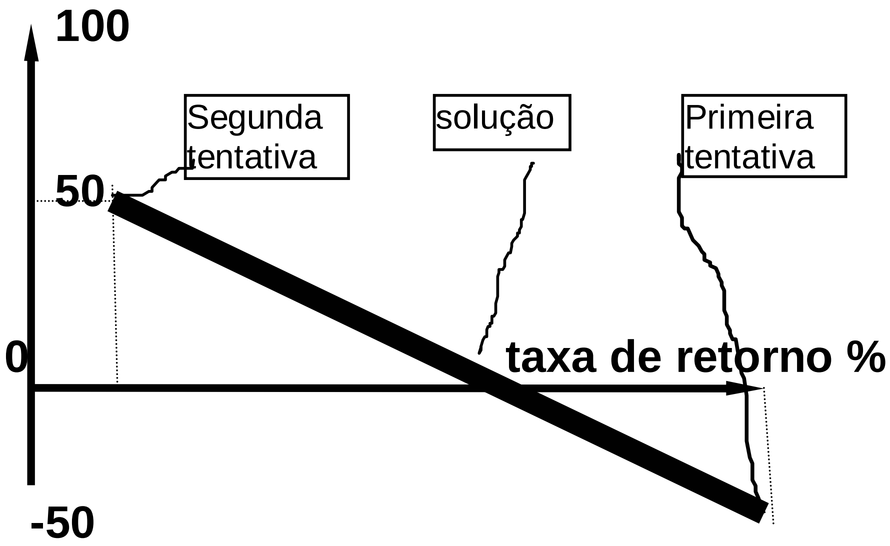
A Taxa Interna de Retorno é definida como sendo a taxa de juros que, aplicada a um fluxo de caixa (série não uniforme), anula a resultante, ou

melhor, equilibra todas as entradas e todas as saídas de valor indexadas ao tempo.

A metodologia de cálculo está apresentada no capítulo anterior - Taxa de Juros da Série, onde se levam em conta a contribuição de cada valor da série (positivo ou negativo) e a distância temporal em que esse valor está aplicado.

O cálculo é feito por "tentativa e erro", já que a variável i é implícita, e não há uma maneira direta que possa ser utilizada (uma equação, por exemplo) para se obter a resposta procurada. Uma forma de facilitar a solução do problema é a de utilizar um gráfico de apoio, como o mostrado a seguir:

soma algébrica do fluxo de caixa (com juros)



O conceito da taxa interna de retorno pré-supõe que todo o fluxo de caixa recebido será reinvestido no mesmo fluxo, em ciclo fechado.

Uma característica importante do método da taxa interna de retorno é que não há vinculação aos tamanhos e valores do fluxo, ou seja, é indiferente se são milhares ou milhões de unidades monetárias.

Há casos em que não há solução e há casos em que há múltiplas taxas que anulam o fluxo. Para a primeira situação, enquadram-se aqueles fluxos que:

- **só possuem valores negativos de caixa (só se paga, sem ter receita);**
- **ou aqueles que só há receitas (só se tem receitas, sem investimentos);**
- **quando a soma algébrica das receitas é menor que o valor do investimento (as receitas não são suficientes para pagar o investimento).**

O valor da taxa interna de retorno é expressa em % ao período (exemplo: 5% ao mês), e é normal se aceitar projetos em que esta taxa é superior a taxa mínima de atratividade, ou por vezes, compara-se com o custo do dinheiro no mercado.

Exemplo: Uma empresa esta prestes a adquirir um novo equipamento para a sua linha de produção, no sentido de ampliar a oferta de produtos ao

mercado, com o custo inicial de $ 1 500 000,00, sendo o seu valor residual de $ 390 000,00, ao final de 10 anos. A compra poderá proporcionar um aumento de receitas conforme a tabela a seguir:

ano valor (mil)

1	**222**	**5**	**177**	**9**	**133**
2	**200**	**6**	**166**	**10**	**111**
3	**199**	**7**	**155**		
4	**188**	**8**	**144**		

				i%	i%	i%
ano	receita+	compra	total	10	5	6,1
0		-1500	-1500	-1500	-1500	-1500
1	222		222	201,82	211,43	209,24

2	200		200	165,29	181,41	177,66
3	199		199	149,51	171,90	166,61
4	188		188	128,41	154,67	148,35
5	177		177	109,90	138,68	131,64
6	166		166	93,70	123,87	116,36
7	155		155	79,54	110,16	102,41
8	144		144	67,18	97,46	89,67
9	133		133	56,40	85,73	78,06
10	111	390	501	193,16	307,57	277,13
total				-255,09	82,89	-2,87

Utilizando-se o método de tentativas e erros, da mesma forma que no capítulo anterior para cálculo da Taxa de Juros de Fluxo não Uniforme, utilizando-se uma estimativa inicial de 10% ao ano, converge-se para a taxa (suficientemente aproximada) de 6% ao ano, que anula o fluxo.

Se esse valor for superior à taxa mínima de atratividade, o projeto torna-se viável.

Valor Atual

A partir de uma taxa de juros estabelecida (taxa mínima de atratividade, taxa de mercado, etc.), calcula-se o VPL como o apresentado no capítulo anterior - Valor Equivalente no Tempo, sendo que o fluxo é transferido para o tempo zero. Se o resultado for positivo, o projeto é economicamente atrativo.

Exemplo: Um empresário está disposto a investir em um projeto que seja rentável e lhe são apresentadas duas opções de investimento, a seguir discriminadas. Pergunta-se qual a mais atrativa e se há alguma que não seja viável economicamente.

A - compra de um equipamento de manufatura de brinquedos, preço de $ 100 000,00, receita mensal (já retirados os custos) de $ 15 000,00, valor

residual do equipamento igual a zero e taxa mínima de atratividade 2% ao ano, tempo de 8 anos.

B - investimento inicial de $ 10 000,00, a receber $ 3 000,00 por ano, durante 8 anos, taxa mínima de atratividade 2% ao ano.

A

Tempo	valor	valor	total	descontado
0	-100000	0	-100000	-100000.00
1		15000	15000	14705.88
2		15000	15000	14417.53
3		15000	15000	14134.84
4		15000	15000	13857.68
5		15000	15000	13585.96
6		15000	15000	13319.57
7		15000	15000	13058.40

8		15000	15000	12802.36
			VPL=	9882.22

B

tempo	valor	valor	total	descontado
0	-10000	0	-10000	-10000.00
1		3000	3000	2941.18
2		3000	3000	2883.51
3		3000	3000	2826.97
4		3000	3000	2771.54
5		3000	3000	2717.19
6		3000	3000	2663.91
7		3000	3000	2611.68
8		3000	3000	2560.47
			VPL=	11976.44

Apesar de que os valores envolvidos no projeto A serem de maior grandeza, o Valor Atual (Valor Equivalente no Tempo Zero) do projeto B é maior (A = $ 9 882,22 contra B = $ 11 976,44). Ambos são atrativos, porém B é o melhor entre os apresentados, sob o ponto de vista do valor atual.

Custo Anual

Levando-se em conta todas as entradas e saídas de valores de um determinado fluxo não uniforme, pode-se convertê-lo em um fluxo uniforme, permitindo a comparação entre alternativas.

Deve-se levar em conta a necessidade de ambos os fluxos terem as durações idênticas, ou melhor, os tempos totais de fluxos em comparação devem ser os mesmos.

Exemplo: Na compra de um apartamento há, no mesmo prédio, duas oportunidades, sendo que o tempo para o pagamento de qualquer das opções é de 15 anos. A opção 1 requer um pagamento inicial de $ 50 000,00 e 15 prestações mensais de $ 1 000,00, com 2 intermediárias de $ 5 000,00, no 5 e 10 anos. A opção 2 custa $ 72 000,00 a vista. Os imóveis são

idênticos e a escolha é simplesmente econômica. A taxa mínima de atratividade é de 3% ao ano.

1

Ano	valor	valor	Valor	total	desc	anual
0	-50000	0	0	-50000	-50000	
1		-1000	0	-1000	-971	-5861
2		-1000	0	-1000	-943	-5861
3		-1000	0	-1000	-915	-5861
4		-1000	0	-1000	-888	-5861
5		-1000	-5000	-6000	-5176	-5861
6		-1000	0	-1000	-837	-5861
7		-1000	0	-1000	-813	-5861
8		-1000	0	-1000	-789	-5861

9		-1000	0	-1000	-766	-5861
10		-1000	-5000	-6000	-4465	-5861
11		-1000	0	-1000	-722	-5861
12		-1000	0	-1000	-701	-5861
13		-1000	0	-1000	-681	-5861
14		-1000	0	-1000	-661	-5861
15		-1000	0	-1000	-642	-5861
					-69971	

obs: a coluna desc é calculada transferindo o total do período com base na taxa oferecida

obs: a coluna anual é calculada como no capítulo anterior, Elemento da Série, dado o somatório dos valores (-69971) e a taxa de juros

2

ano	valor	anual
0	-72000	
1		-6031

2		-6031
3		-6031
4		-6031
5		-6031
6		-6031
7		-6031
8		-6031
9		-6031
10		-6031
11		-6031
12		-6031
13		-6031
14		-6031
15		-6031

O custo anual da opção 2 é maior que o da opção 1, sendo mais atrativa a primeira apresentada, sob o ponto de vista do custo / período.

8 - Formulário

PAGAMENTO ÚNICO

valor futuro	$S = P \times (1 + i)^{N}$
valor atual	$P = \dfrac{S}{(1 + i)^{N}}$
tempo de capitalização	$N = \dfrac{\mathrm{LOG}(S / P)}{\mathrm{LOG}(1 + i)}$
taxa de juros	$i = (S / P)^{1/N} - 1$

SÉRIE UNIFORME DE PAGAMENTOS

formação de capital	$S = \dfrac{R \times ((1 + i)^{N} - 1)}{i}$
valor atual	$P = \dfrac{R \times (1 - (1 + i)^{-N})}{I}$
elemento da série	$R = \dfrac{P\ i}{1 - (1 + i)^{-N}}$
tempo da série	$N = \dfrac{LOG(R / (R - P \times i))}{LOG(1 + i)}$

taxa de juros da série	$f(i) = R\,(1 - (1+i)^{-N}) - P\,i$
taxa de juros da série-Baily	$h=[(N R / P) \wedge (2 / (N + 1))] -1$ $i = \dfrac{12 - (N - 1)\,h}{12 - 2\,(N - 1)\,h}\,h$
saldo devedor no período k	$D(k) = \dfrac{P((1 + i)^N-(1 + i)^k)}{(1 + i)^N - 1}$
Amortização de prestação	$A(p, p-1) = D(p) - D(p-1)$
Perpetuidade	$P = R / i$

JUROS

taxa acumulada	$j\% = \left(\left(1 + i\% / 100\right)^{N} - 1\right) \times 100$
taxa por período	$i\% = \left(\left(J\% / 100 + 1\right)^{(1 / N)} - 1\right) \times 100$
tempo da série	$N = \dfrac{\mathrm{LOG}\,(J\% / 100 + 1)}{\mathrm{LOG}\,(i\% / 100 + 1)}$

9 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1-Geraldo Hess, José Luiz Marques, L.C. Rocha Paes, Abelardo Puccini, Engenharia Econômica
2-Frank Aires Jr, Matemática Financeira, McGraw-Hill do Brasil, 1979
3-Remo Mannarino, Introdução à Engenharia Econômica, Editora Campus
4-William B. Riley, Jr and Austin H. Montgomery, Jr., Guide to Computer-assisted Investment Analysis, McGraw-Hill
5-Mario Braga, Matemática Financeira, Fundação da Universidade Federal do Paraná
6-J.J. da Serra Costa, Tópicos Especiais em Matemática Financeira, Editora Interciência
7-João Lopes de Albuquerque Montenegro, Engenharia Econômica, Vozes
8-Lon Poole, Pratical Basic Programs, Osborne/McGraw-Hill

Armando Oscar Cavanha Filho é Engenheiro Mecânico; Mestre em Engenharia de Produção-Logística; Pós-graduado em Engenharia de Segurança; Especializado em Engenharia de Terminais e Oleodutos. Gerente Executivo de MATERIAIS, PETROBRAS; Diretor da empresa ePetro – PETROBRAS NEGÓCIOS ELETRÔNICOS, subsidiária da PETROBRAS; Presidente do Conselho de Administração da empresa PNE – Procurement Negócios Eletrônicos, subsidiária da PETROBRAS; Diretor da empresa PETROBRAS Netherlands BV, subsidiária da PETROBRAS na Holanda; Professor da Fundação Getúlio Vargas RJ, MBA de Logística. Autor dos livros Gráficos no APPLE & TK2000; Gráficos no MSX - Conceitos e Programas; Rotinas Financeiras - APPLE & Compatíveis; Rotinas Financeiras - MSX & IBM-PC; BASIC padrão MICROSOFT - IBM-PC & Compatíveis;TURBO BASIC; HARVARD GRAPHICS; Introdução ao QuickBASIC; WINDOWS 3.1-Guia Rápido; DOS 6-Guia Rápido, pela Ciencia Moderna. Matemática Financeira; Logística – Novos Modelos; Decisões Financeiras – Ferramentas para Logística pela Qualitymark; premiado pela revista NIBBLE MAGAZINE, USA, January 1985, page 160; e pela revista PC RESOURCE MAGAZINE, USA, January 1988, com os prêmios de melhor artigo do mês. Autor de patentes e softwares como FORECASTER - (FIT2); RFT; LOG; FIN; QUAL; LOGSIM.

www.geocities.com/cavanha cavanha@yahoo.com