Rodrigo Nogueira de Codes

MATEMÁTICA BÁSICA

EDUFERSA

Rodrigo Nogueira de Codes

MATEMÁTICA BÁSICA

EdUFERSA

Governo Federal
Ministro de Educação
Aloizio Mercadante Oliva

Universidade Aberta do Brasil
Responsável pela Diretoria da Educação a Distância
João Carlos Teatini de Souza Clímaco

Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Reitor
José de Arimatea de Matos

Pró-Reitor de Graduação
Augusto Carlos Pavão

Núcleo de Educação a Distância
Coordenadora UAB
Kátia Cilene da Silva

Equipe multidisciplinar
Antônio Charleskson Lopes Pinheiro - Coordenador de Produção de Material Didático
Ulisses de Melo Furtado – Designer Instrucional
Nayra Maria da Costa Lima – Assessora Pedagógica
Celeneh Rocha de Castro - Coordenadora de Formação Continuada
Thiago Henrique Freire de Oliveira – Gerente de Rede
Edinaldo de Queiroz Fonseca Junior – Webdesigner
Adriana Mara Guimarães de Farias – Programadora
Felipe de Araújo Alves – Designer Gráfico
Renato Cássio Arruda Alves – Designer Gráfico
Paulo Victor Maciel de Morais - Diagramador
Marcos Aurélio Oliveira Ribeiro - Diagramador
Ramon Ribeiro Vitorino Rodrigues - Diagramador

Arte da capa
Felipe de Araújo Alves

Equipe administrativa
Rafaela Cristina Alves de Freitas – Assistente em Administração
Iriane Teresa de Araújo – Responsável pelo fomento
Lucas Vinicius Martins Cunha – Estagiário

Equipe de apoio
Marcos Antonio de Oliveira – Revisor Linguístico
Nayra Maria da Costa Lima – Revisor de Didática
Flaviana Moreira de Souza Amorim – Revisor Matemático
Josenildo Ferreira Galdino – Revisor Matemático

Serviços técnicos especializados
Urbanóide Comunicação & Design

Edição
EdUFERSA

Impressão
Imprima Soluções Gráfica Ltda/ME

Biblioteca Central Orlando Teixeira – BCOT/UFERSA
Setor de Processos Técnicos – Ficha Catalográfica

C669m Codes, Rodrigo Nogueira de.

Matemática básica / Rodrigo Nogueira de Codes.
– Mossoró : EdUFERSA, 2013.
102 p. : il.

ISBN: 978-85-63145-35-2

1. Matemática. I. Título.

RN/UFERSA/BCOT CDD: 510

Bibliotecário-Documentalista
Mário Gaudêncio – CRB-15/476

http://nead.ufersa.edu.br/

APRESENTAÇÃO DA DISCIPLINA

Seja bem-vindo(a) à disciplina de Matemática Básica!

Aqui, nosso objetivo é disponibilizar informações de como você irá acompanhar o curso da melhor maneira possível.

Nesta disciplina, você irá rever e utilizar alguns conceitos do ensino fundamental e médio, dando um enfoque de nível superior. A diferença estará na forma da abordagem que será dada. Além de rever esses conceitos de forma efetiva, você construirá uma atitude matemática profissional.

A matemática deixará de ser um conjunto de regras e convenções simples para se desenvolver num conjunto sustentado de conhecimentos que se relacionam e se sustentam. Esperamos que, ao final deste semestre, você tenha sucesso e se sinta bastante confiante para enfrentar os futuros desafios de seu curso.

O principal papel da Matemática Básica é prepará-lo para cursar uma importante cadeia de disciplinas: Cálculo I, II e III, Equações Diferenciais e Álgebra Linear. A experiência a ser adquirida nesta disciplina lhe dará a desenvoltura necessária para lidar com os conteúdos associados às funções reais, matéria básica para o Cálculo I. Ao término deste curso, você estará preparado para efetuar as principais operações com funções, habilidade tão necessária no Cálculo I. Além disso, você terá tido uma boa experiência com um grande número de operações matemáticas também de extrema importância, como os polinômios. As operações com matrizes, o cálculo de determinantes e a resolução de sistemas lineares darão, também, uma forte base para a disciplina de Álgebra Linear.

Para orientar o seu estudo, nossas atividades estarão divididas em três unidades. Cada unidade será organizada em tópicos que irão abordar o objetivo de cada assunto, os conteúdos e os exemplos, além de exercícios propostos.

A Unidade 1 tratará sobre os conjuntos numéricos. Na Unidade 2 abordaremos as funções e seus gráficos. Trata-se do assunto mais extenso, que compreenderá as seguintes funções: afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica e trigonométrica. Na sequência, iniciaremos a Unidade 3, onde veremos, primeiramente, os polinômios e operações. Em seguida, faremos o estudo das matrizes, dos determinantes e dos sistemas lineares.

Ao final de cada assunto, haverá vários exercícios resolvidos com grau de dificuldade que aumenta gradativamente e uma lista de exercícios propostos a resolver e praticar os conceitos estudados.

Bons estudos e seja bem-vindo!

SOBRE O AUTOR

Prezado(a) aluno(a),

Gostaríamos de dar boas vindas na disciplina de Matemática Básica. Você está iniciando uma jornada que mudará a sua vida, fazendo parte de uma universidade pública, que lhe oferece a oportunidade de obter uma formação de excelente qualidade.

Estamos contentes por começar esta caminhada juntos com este tão nobre objetivo que é a formação de quadros docentes com qualidade. Para atingir tão precioso objetivo, planejamos um curso aberto, com a maior flexibilidade possível, e favorecendo o processo individual de construção de sua autonomia. A proposta do curso é a formação de qualidade diversificada, permitindo planejar caminhadas futuras no Ensino Básico e Médio e em Pós-graduações, sem limites na escalada do processo de conhecimento, na perspectiva maior da educação autônoma, cujo lema é aprender ao longo da vida.

Falando agora sobre minha formação, fiz dupla graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Ceará (2003) e em Engenharia Generalista pela Ecole Centrale de Lyon (2003), da França. Tenho também mestrado em Engenharia e Ciência de Materiais pela Universidade Federal do Ceará (2006) e, ainda, doutorado na Ecole Normale Supérieure de Cachan, na França, em Engenharia Mecânica e de Materiais (2011). Atualmente, sou professor adjunto no Departamento de Ciências Ambientais e Tecnológicas (DCAT) da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA).

Meu interesse é de contribuir para que o ensino a distância seja um sucesso e, com a disciplina de Matemática Básica, ajudar a solidificar uma formação de base para a boa sequência do curso.

Um abraço!

Rodrigo.

SUMÁRIO

I CONJUNTOS NUMÉRICOS

Na Unidade 1, iremos rever a teoria de conjuntos. Vamos estudar os elementos, a noção de conjuntos, além dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, que estão dentre os objetivos gerais da mesma, além de:

- realizar operações entre conjuntos;
- trabalhar com intervalos reais e realizar operações entre os mesmos.

Em cada subtópico, relembraremos outros conceitos matemáticos básicos que serão extremamente importantes na sequência do curso, como os decimais periódicos, intervalos reais ou os valores absolutos.

Noções preliminares

O conjunto é um conceito fundamental em todos os ramos da Matemática. Este pode ser considerado uma noção primitiva, assim como o elemento e a pertinência entre elemento e conjunto.

Intuitivamente, um conjunto é uma lista, coleção ou classe de objetos bem definidos. Os objetos em um conjunto são chamados de elementos e podem ser: números, algarismos romanos, naipes das cartas de um baralho, mas também variáveis, equações, operações, algoritmos, sentenças, nomes, etc. Utilizam-se as letras maiúsculas (A, B, C, ...) para representar os conjuntos e as letras minúsculas (a, b, c, x, y, ...) para representar os elementos.

Exemplo:

V é o conjunto das vogais, logo, $V = \{a, e, i, o, u\}$, que se lê: "V é o conjunto cujos elementos são a, e, i, o, u".

Existem duas maneiras de representarmos um conjunto: (1) listando-se todos os seus elementos ou (2) enunciando uma propriedade característica dos elementos do conjunto, ou seja, o exemplo anterior pode ser reescrito da seguinte forma:

Exemplo:

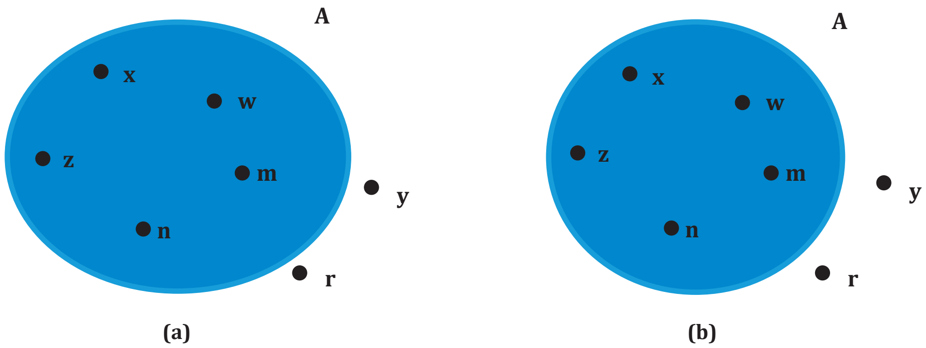
$V = \{x \mid x \text{ é vogal de nosso alfabeto}\}$.

Com relação aos símbolos, para representar que o elemento x está no conjunto A, escrevemos $x \in A$ "lê-se x pertence a A" e $y \notin A$ "lê-se y não pertence a A".

Usualmente, representamos os conjuntos na forma de balões, onde os elementos no interior dos mesmos pertencem ao conjunto, ao passo que quando um elemento está no exterior do conjunto, significa que ele não pertence ao mesmo (Figura 1.1), de modo que $x \in A$; $w \in A$; $r \notin A$ e $y \notin A$.

13

Figura 1.1: Conjunto A: (a) representação dos elementos do conjunto pelos pontos interiores a uma linha fechada e não entrelaçada. (b) no caso do uso de um círculo para representar um conjunto, o mesmo é chamado diagrama de Euler-Venn.



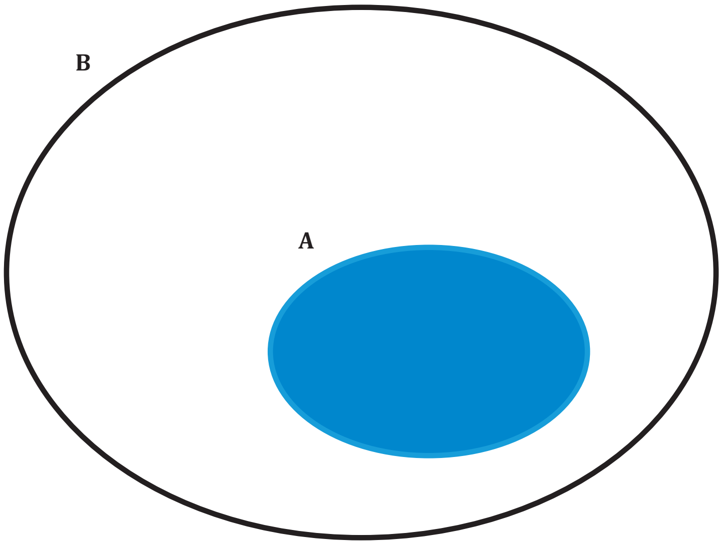
Chama-se conjunto unitário aquele que possui um único elemento, e conjunto vazio aquele que não possui elemento algum. Usualmente, o símbolo para este conjunto é $\emptyset$.

Exemplos:

1. Conjunto das soluções da equação $2x + 3 = 21$: $\{9\}$
2. Conjunto dos Estados Brasileiros que começam com a letra C: {Ceará}
3. $\{x \mid x \neq x\} = \emptyset$

Um conjunto A está contido em um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A é também elemento de B. Ou seja, escreve-se em notação $A \subset B$ e lê-se "A está contido em B" ou "A é subconjunto de B" como mostrado na Figura 1.2. Trata-se de uma relação de inclusão, e em símbolos a definição fica da seguinte forma: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Figura 1.2: $A \subset B$ e lê-se “A está contido em B” ou “A é subconjunto de B”.



Dados dois conjuntos A e B (Figura 1.3), onde A = {x, z, n, w, m} e B = {w, m, r, y}. Denomina-se união (ou reunião) de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B (Figura 1.4).

Logo, $A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}=\{x, z, n, w, m, r, y\}$

Figura 1.3: Conjuntos A e B, onde: A = {x, z, n, w, m} e B = {w, m, r, y}.

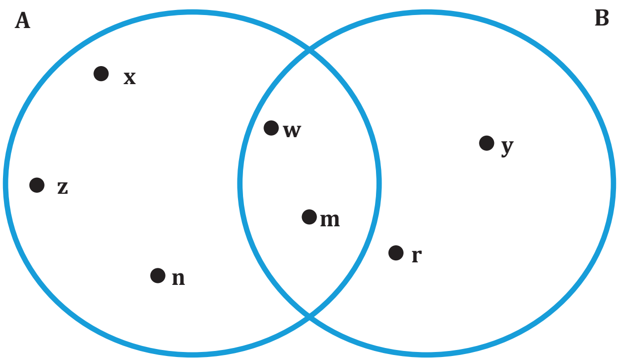
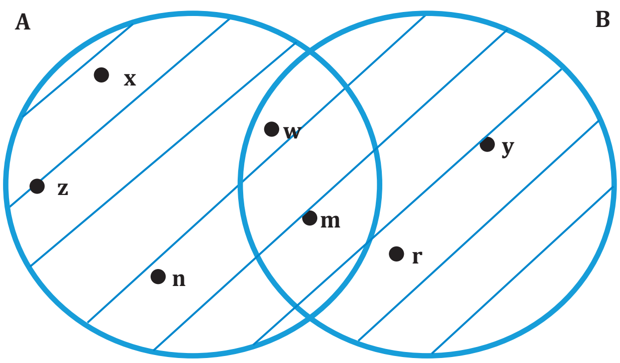


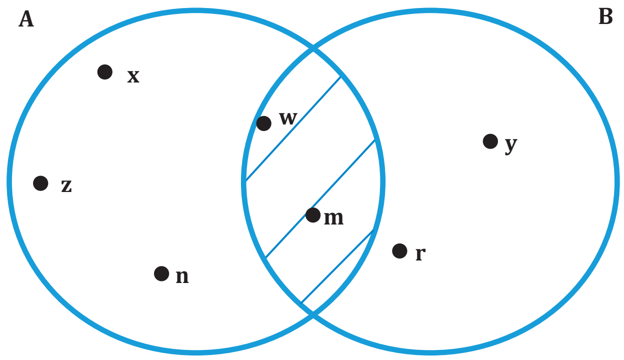
Figura 1.4: Conjunto $A \cup B$ = {x, z, n, w, m, r, y}.



Dados os mesmos dois conjuntos A e B, chama-se interseção de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B (Figura 1.5).

Logo, $A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}=\{w, m\}$

Figura 1.5: Conjunto A ∩ B = { w, m}.



Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, as propriedades que relacionam a reunião e a interseção de conjuntos são as seguintes:

1. $A \cup (A \cap B) = A$
2. $A \cap (A \cup B) = A$
3. Distributiva da reunião em relação à interseção:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. Distributiva da interseção em relação à reunião:
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

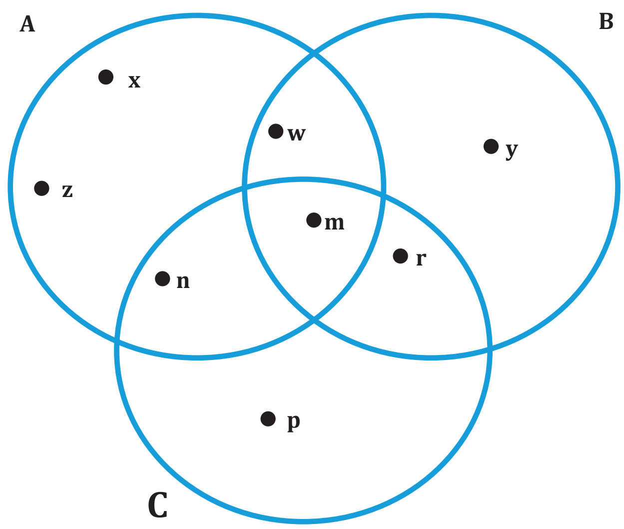
Supondo que $A = \{x, z, n, w, m\}$, $B = \{w, m, r, y\}$ (como na Figura 1.3) e $C = \{n, m, r, p\}$. Para demonstrar a primeira propriedade, tem-se que, primeiramente:

$(A \cap B) = \{w, n\}$ (Figura 1.5) e em seguida

$A \cup (A \cap B) = \{x, z, n, w, m\} = A$

A Figura 1.6 mostra os três conjuntos A, B e C.

Figura 1.6: Conjuntos A, B e C, onde: A = {x, z, n, w, m}; B = {w, m, r, y} e C = {n, m, r, p}.

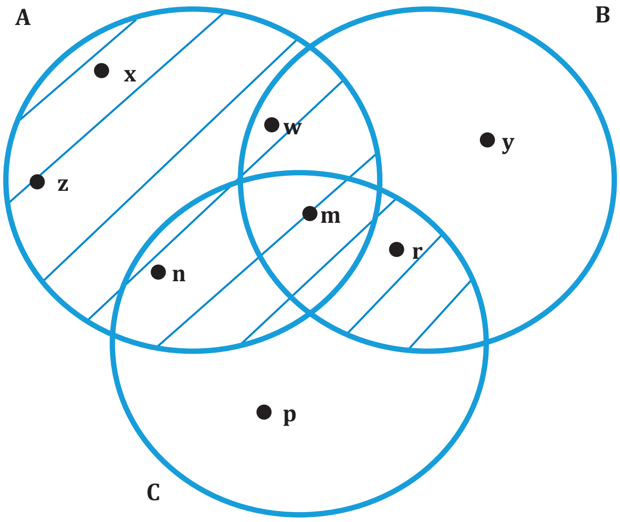


Para demonstrar a terceira propriedade, tem-se que, primeiramente:

$(B \cap C) = \{m, r\}$ (pode ser facilmente observado na Figura 1.6) e em seguida

$A \cup (B \cap C) = \{x, z, n, w, m, r\} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Figura 1.7)

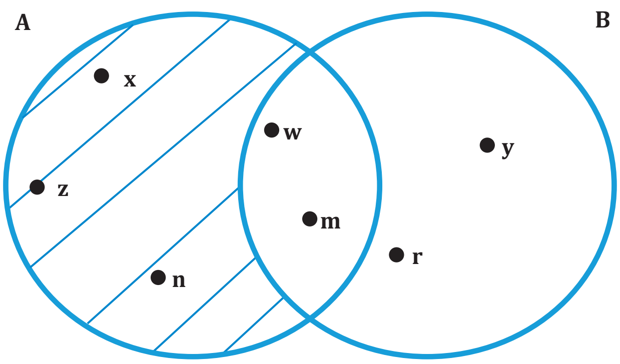
Figura 1.7: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{x, z, n, w, m, r\}$.



Ainda com os mesmos dois conjuntos A e B, chama-se diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B (Figura 1.8).

Logo, $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Figura 1.8: Conjunto $A - B = \{w, m\}$.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Quais são os elementos dos conjuntos seguintes:

a) $E = \{x \mid x$ é Estado da região Nordeste do Brasil$\}$

Resposta:
E = {Maranhão, Piauí, Ceará, Rio Grande do Norte, Paraíba, Pernambuco, Alagoas, Sergipe, Bahia}

b) $M = \{x \mid x$ é múltiplo inteiro de $7\}$

Resposta:
$M = \{0, 7, -7, 14, -14, 21, -21, ...\}$

2. Enuncie uma propriedade característica dos elementos de cada conjunto abaixo:

a) A = {1, 3, 5, 7, 9, 11, ...}

> ***Resposta:***
> A = {x | x é inteiro, ímpar e não negativo}

b) B = {abril, junho, setembro, novembro}

> ***Resposta***:
> B = {x | x é nome de mês de 30 dias}

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Demonstre as propriedades 2 e 4 que relacionam a reunião e a interseção de conjuntos.

2. Liste todos os elementos dos seguintes conjuntos:

A = { x | x é letra da sigla UFERSA}

B = { x | x é Estado do Brasil que começa com a letra R}

C = { x | x é número primo positivo}

3. Enuncie uma propriedade característica dos elementos de cada conjunto abaixo:

D = {São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais, Espírito Santo}

E = {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...}

4. Escreva os seguintes conjuntos com símbolos:

a) O conjunto dos múltiplos inteiros de 5 entre -20 e +20;

b) O conjunto dos divisores de 44;

c) O conjunto dos múltiplos inteiros de 0;

d) O conjunto dos nomes das capitais da região Nordeste do Brasil.

5. Descreva por meio de uma propriedade dos elementos abaixo os seguintes conjuntos:

A = {+1, -1, +2, -2, +4, -4}

B = {1, 4, 8, 16, 32, 64, ...}

C = {verde, amarelo, azul, branco}

6. Em um grupo de n cadetes da Aeronáutica, 17 nadam, 19 jogam basquete, 21 jogam vôlei, 5 nadam e jogam basquete, 2 nadam e jogam vôlei, 5 jogam basquete e vôlei e 2 fazem os três esportes. Qual o valor de n, sabendo-se que todos os cadetes desse grupo praticam pelo menos um desses esportes?

a) 31 b) 37 c) 47 d) 51 e) 71

7. Suponhamos que $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A \cap B = \{d, e\}$ e $A - B = \{a, b, c\}$. Então:

a) B = {f, g, h} b) B = {d, e, f, g, h} c) B = {a, b, c, d, e}

d) B = {d, e} e) $B = \emptyset$

Conjunto dos números: naturais, inteiros, racionais e reais

Até o momento, falou-se sobre conjuntos de um modo geral. Na sequência, serão abordados os conjuntos numéricos.

Conjunto dos números naturais

O conjunto dos números naturais tem por símbolo $\mathbb{N}$ e é formado pelos elementos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots \}$$

Esses números surgiram "naturalmente" pela necessidade de se contar objetos ou seres já nas comunidades primitivas na Antiguidade, por volta de 4.000 anos antes de Cristo. No conjunto dos números naturais, dado um elemento n qualquer, diz-se que o antecessor de n é o elemento n - 1 e o sucessor de n é o elemento n + 1. Logo, 2 é antecessor de 3 e 4 é o sucessor de 3.

Como operações fundamentais para os números naturais, têm-se a adição e a multiplicação. Dados a, b e c $\in \mathbb{N}$, pode-se apresentar as seguintes propriedades:

1. Associativa da adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. Comutativa da adição: $a + b = b + a$
3. Elemento neutro da adição: $a + 0 = a$
4. Associativa da multiplicação: $(ab)c = a(bc)$
5. Comutativa da multiplicação: $ab = ba$
6. Elemento neutro da multiplicação: $a.1 = a$
7. Distributiva da multiplicação relativamente à adição: $a (b + c) = ab + ac$

No conjunto dos números naturais, as operações de adição e multiplicação são fechadas, ou seja, são possíveis com quaisquer que sejam os números naturais. Porém, o mesmo não é sempre verdade com as operações da subtração e divisão. Por exemplo, admitindo que $a = 3$ e $b = 7$, então $a – b \notin \mathbb{N}$ e a b $\notin \mathbb{N}$. Os conjuntos numéricos a serem apresentados posteriormente são ampliações de $\mathbb{N}^*$.

Observação: $\mathbb{N}^* = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots \}$ e $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.

Conjunto dos números inteiros

O conjunto dos números inteiros tem por símbolo $\mathbb{Z}$ e é formado pelos elementos:

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots \}$$

Este conjunto possui três subconjuntos notáveis:

$$\mathbb{Z}_+ = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots \} = \mathbb{N}, \text{ ou seja, } \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{ 0, -1, -2, -3, -4, -5 \ldots \}$$

$$\mathbb{Z}^* = \{ \ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots \}$$

Os números negativos apareceram, historicamente, em registros contábeis, mas também como símbolo indicativo de faltas ou dívidas.

Para as operações em $\mathbb{Z}$, tem-se também as sete propriedades da adição e da multiplicação explanadas no tópico anterior para o conjunto $\mathbb{N}$. Além delas, pode-se acrescentar a seguinte propriedade:

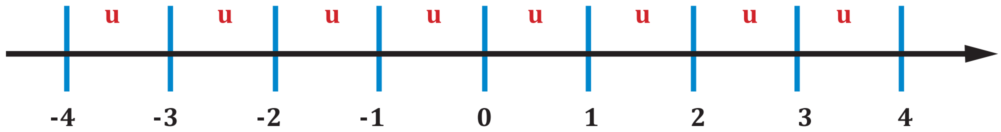
8. Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $– a \in \mathbb{Z}$, tal que $a + (- a) = 0$

Os números inteiros podem ser representados sobre uma reta (Figura 1.9), onde em primeiro lugar marcamos o número 0 (zero). Todos os números à direita do zero são positivos (conjunto $\mathbb{Z}_+$) e aqueles à sua esquerda são os números negativos (conjunto $\mathbb{Z}_-$).

Para cada inteiro positivo *n*, a partir de 0, marcamos um segmento de medida *nu* no sentido positivo cuja extremidade representará *n*, ao passo que u representa uma unidade de medida. Marca-se também de medida nu no sentido negativo cuja extremidade representará o inteiro –*n*. Assim, cada número inteiro corresponderá a um ponto da reta. Portanto, o número -4 corresponderá, partindo-se da origem, 4 unidades para a esquerda, ao passo que o número 3 corresponderá ao ponto partindo-se da origem três unidades para a direita.

Para efetuar uma subtração de 2 – 4, basta caminhar, primeiramente, na reta duas unidades para a direita a partir da origem, e na sequência, caminhar a partir deste ponto, de quatro unidades para a esquerda, resultando em – 2.

Figura 1.9: Reta representando o conjunto dos números inteiros.



No conjunto dos números inteiros, as operações de adição e multiplicação são fechadas, assim como nos naturais, além da operação da subtração. Porém, o mesmo não é sempre verdade com a operação da divisão. Por exemplo, admitindo que a = 3 e b = -7, então a $\div$ b $\notin \mathbb{Z}$.

Define-se como valor absoluto |x| de um número inteiro x como sendo o comprimento do segmento nu partindo da origem 0. Desse modo |+2|=2; |-2|=2; |+4|=4; |-6|=6.

Conjunto dos números racionais

O conjunto dos números racionais é uma extensão do conjunto dos números inteiros, onde são acrescentadas as frações positivas e negativas, de tal forma que:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* e\, q \neq 0 \right\}$$

Onde $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Para operações com números racionais, vale a pena lembrar as seguintes definições, largamente utilizadas na matemática (a, b, c e d são números inteiros):

- Igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

- Adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

- Multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Visto isso, podem-se enumerar as seguintes operações com números racionais:

1) Associativa da adição: $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$

2) Comutativa da adição $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

3) Elemento neutro da adição $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$

4) $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$

5) Associativa da multiplicação: $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$

6) Comutativa da multiplicação: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$

7) Elemento neutro da multiplicação: $\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$

8) Distributiva da multiplicação relativamente à adição: $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$

9) Quociente: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}, b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0$

Ao dividirmos um número racional do tipo $\frac{a}{b}$ pode-se deparar com três tipos de situação: essa razão pode ser um número inteiro, um número decimal com uma quantidade finita de algarismos ou um número decimal com uma quantidade infinita de algarismos, como mostra o exemplo seguinte cada situação respectivamente.

Exemplos:

$$\frac{6}{2}=3; \frac{1}{5}=0,2; \frac{1}{3}=0,3333\ldots$$

Para o terceiro caso, observa-se que os algarismos se repetem periodicamente, o que significa dizer que se trata de uma dízima periódica.

Exemplos:

$\frac{2}{3}=0,6666\ldots$ (dízima periódica de período 6)

$\frac{2}{7}=0,285714285714\ldots$ (dízima periódica de período 285714)

$\frac{26}{33}=0,787878\ldots$ (dízima periódica de período 78)

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine o valor da expressão numérica:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{10}}$$

Resposta:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3+4}{2\cdot 3}=\frac{7}{6}$$

$$\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{4-1}{10}=\frac{3}{10}$$

Logo:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{7}{6}}{\frac{3}{10}}=\frac{7}{6}\cdot\frac{10}{3}=\frac{70}{18}=\frac{35}{9}$$

2. Determine as seguintes dízimas periódicas na forma de fração:

a)0,777... b)0,262626... c)2,7777... d)7,545454... e)2,944444...

Resposta:
a) Faça x = 0,7777...

$$10x = 7{,}7777...$$
$$10x = 7 + 0{,}7777...$$
$$10x = 7 + x$$

Logo, 9x = 7 e $x=\frac{7}{9}$

b) Nesse caso, faça x = 0,262626... Como o período é 26 (duas casas decimais), tem-se:

$$100x = 26{,}262626...$$
$$100x = 26 + 0{,}262626...$$
$$100x = 26 + x$$

Logo, 99x = 74 e $x=\frac{74}{99}$

c) Inicialmente, tem-se que 2,7777... = 2 + 0,7777..., logo x = 0,7777...
Do primeiro exercício $x=\frac{7}{9}$ portanto 2 + 0,7777... $=2+\frac{7}{9}=\frac{25}{9}$

d) Mais uma vez, tem-se que 7,545454... = 7 + 0,545454..., logo x = 0,545454... O período é 54 (duas casas decimais). O procedimento de resolução é, portanto, idêntico ao do segundo exercício, então $x=\frac{54}{99}$ e como resultado tem-se

$$7 + x = 7 + \frac{54}{99}=x=\frac{747}{99}$$

e) Nesse caso x = 2,94444... O período aqui é 4 (número que se repete infinitas vezes), logo:

$$10x = 29{,}4444...$$
$$10x = 29 + 0{,}4444...$$
$$10x = 29 + \frac{4}{9}$$
$$10x = \frac{265}{9}$$
$$x = \frac{265}{90}$$

21

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Coloque em ordem crescente os seguintes números racionais: $\frac{14}{15}, \frac{10}{11}, \frac{17}{18}, 1, \frac{46}{47}$ e $\frac{3}{4}$

2. Represente sobre uma reta orientada os seguintes números racionais: $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ e 1.

3. Calcule o valor de: $0{,}888\ldots + \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{7}-\frac{1}{13}}$

4. Coloque na forma de fração irredutível os seguintes números racionais:

a) 0,5 b) 0,555... c) 0,43 d) 0,43434343... e) 65,3

f) 65,323423423...

Conjunto dos números irracionais

Um número irracional é um número decimal com uma quantidade infinita de algarismos que não são periódicos, como por exemplo:

$$0,987654321\ldots$$

$$5{,}101001000\ldots$$

$$98{,}123987\ldots$$

Pode-se dizer também que um número irracional é um número que representa o comprimento de um segmento de reta que é incomensurável com relação a qualquer outro segmento de reta.

Exemplos clássicos de números irracionais na matemática são:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$$

$$\pi = 3{,}1415926\ldots$$

Conjunto dos números reais

O conjunto dos números reais é uma extensão do conjunto dos números racionais, onde se tem a união dos números racionais com os irracionais, portanto é formado por todos os números com representação decimal, periódico ou não, de tal forma que:

$\mathbb{R} = \{x \mid x$ é um número racional ou x é um número irracional$\}$

Onde $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

As operações em $\mathbb{R}$ são as mesmas para o conjunto $\mathbb{Q}$.

Já vimos que os números inteiros podem ser representados em uma reta e são pontos na mesma. Analogamente, os números racionais que não são inteiros são representados da mesma maneira como pontos sobre a reta.

Os números racionais, entretanto, não preenchem completamente a reta, pois ainda devemos representar os números irracionais. Quando a reta representa todos esses números, chamamos de reta real ou numérica, onde, quando se trata de números reais, a representação é feita na forma de intervalos.

Um intervalo fechado da reta é qualquer subconjunto da reta do tipo:

$$[a, b]=\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Um intervalo aberto da reta é um subconjunto da reta da seguinte forma:

$$]a, b[=\{x \in \mathbb{R} \mid \ a < x < b\}$$

Tem-se também o intervalo fechado à esquerda (ou aberto à direita), representado da seguinte maneira:

$$[a, b[=\{x \in \mathbb{R} \mid \ a \leq x < b\}$$

E ainda o intervalo fechado à direita (e aberto à esquerda) do tipo:

$$]a, b]=\{x \in \mathbb{R} \mid \ a < x \leq b\}$$

Tem-se ainda as condições de infinito pela esquerda e pela direita:

$$]-a, b]=\{x \in \mathbb{R} \mid \ -a < x \leq a\}$$

$$]b, +a]=\{x \in \mathbb{R} \mid \ b < x < +\infty\}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine os seguintes subconjuntos da reta:

a) $]2,5]\cap[4,6]$

b) $]-3,4]\cup[1,\infty[$

Resposta:

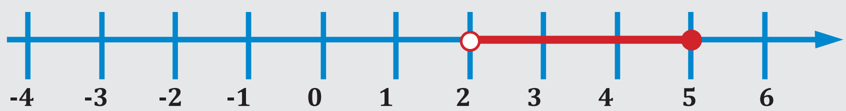
a) Sabe-se que $]2, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$ e $[4,6] = \{x \in \mathbb{R} | 4 \leq x \leq 6\}$

A interseção de dois intervalos é o conjunto de todos os números que estão simultaneamente em ambos os conjuntos, e é dado por

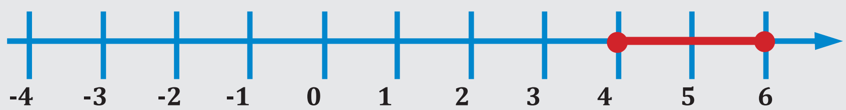
$$]2, 5] \cap [4, 6] = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x \leq 5\}$$

Pode-se representar também graficamente do seguinte modo:

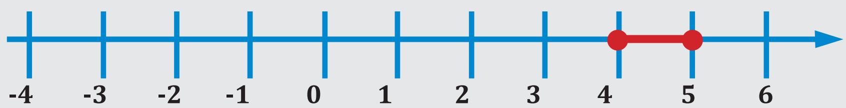
]2,5]



[4,6]



]2,5]∩[4,6]



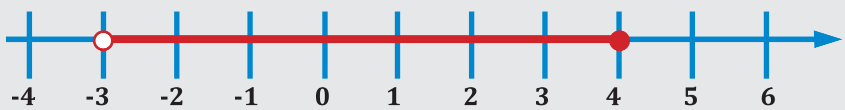
b) Sabe-se que $]-3, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 4\}$ e $[1, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

A união de dois intervalos é o conjunto dos números que pertencem a um ou ao outro conjunto, dado por

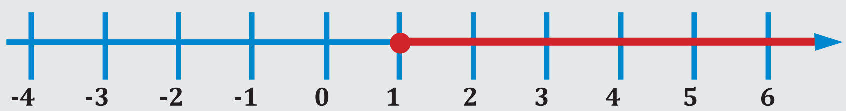
$$]-3,4] \cup [1,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$$

Pode-se representar também graficamente do seguinte modo:

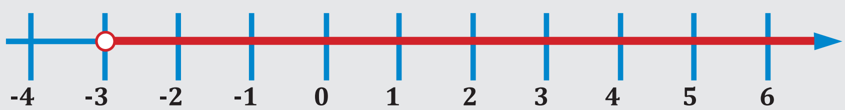
]-3,4]



[1,+∞[



]-3,4]∪[1,+ ∞[

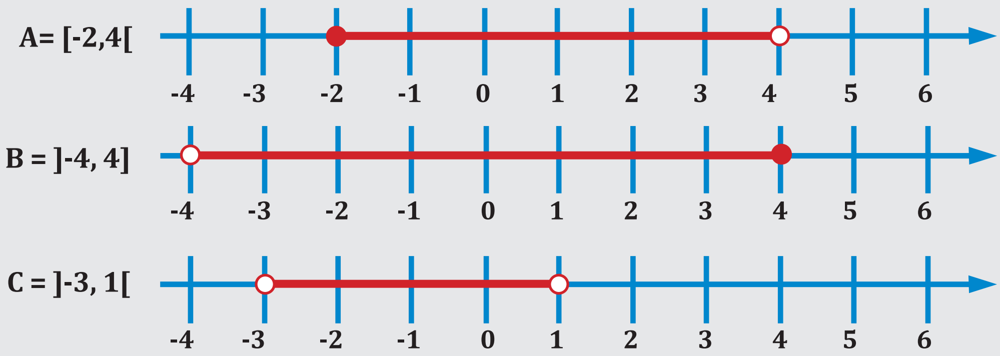


2. Dados os intervalos reais A = [-2, 4[, B =]-4, 4] e C =]-3, 1[, represente graficamente:

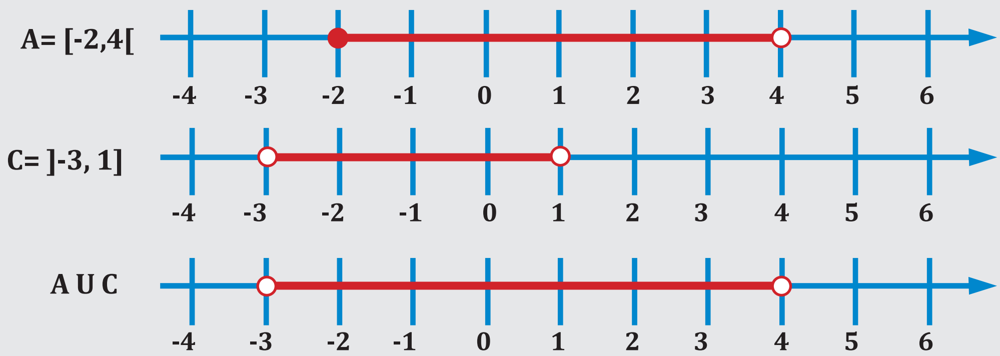
a) (A ∪ C) ∪ B

d) (B ∩ A) ∩ C

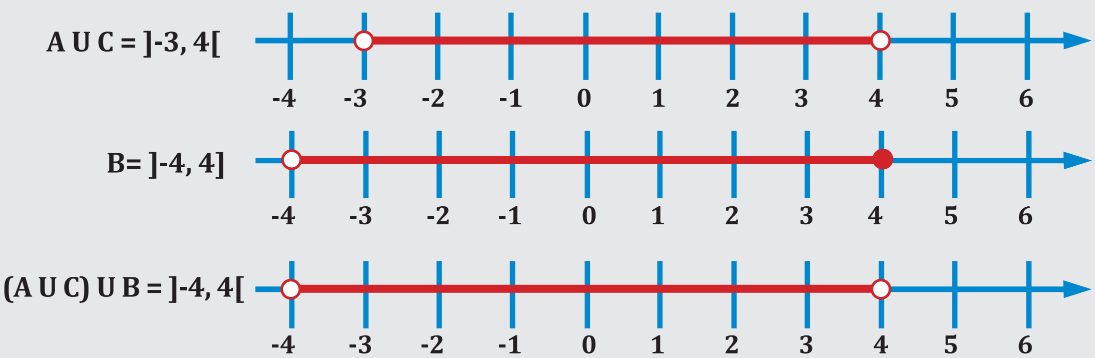
Resposta
Em primeiro lugar, determinam-se os três conjuntos A, B e C, onde:
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 4\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 4\}$
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1\}$
Os conjuntos A, B e C são representados na reta real como:



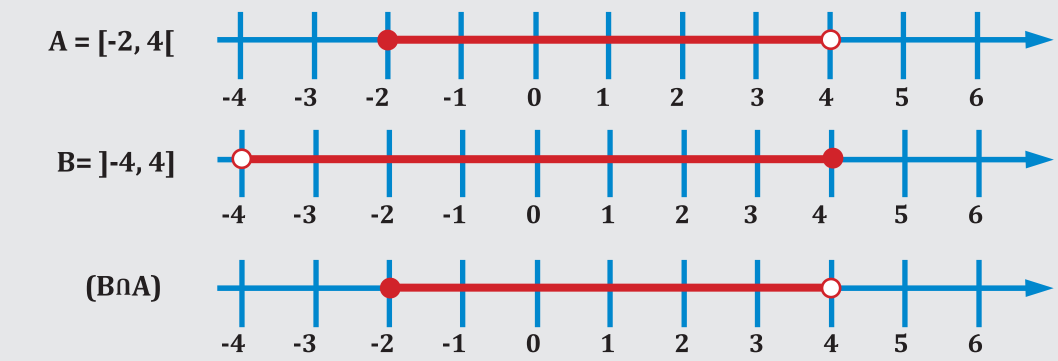
a) (A ∪ C) ∪ B
Inicialmente, obtem-se o conjunto (A ∪ C):



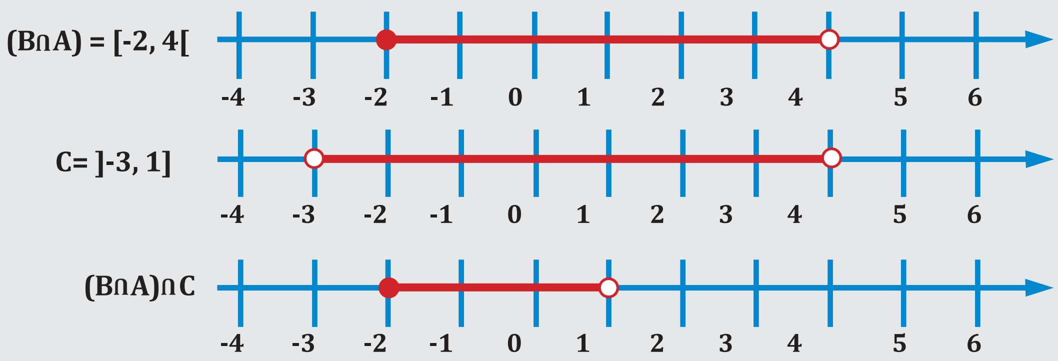
Na sequência, (A ∪ C) ∪ B:



b) (B ∪ A) ∩ C
Da mesma forma que no item anterior, inicialmente obtem-se o conjunto (B ∩ A):



Nota-se que o elemento 4 está aberto em (B ∩ A), pois tal elemento faz parte do conjunto B (intervalo fechado), mas não faz parte do conjunto A (intervalo aberto), portanto com a interseção, o elemento 4 não pertencerá ao conjunto (B ∩ A). Além do mais, (B ∩ A) = A.
Na sequência, (B ∩ A) ∩ C:



EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Determine os seguintes subconjuntos da reta:

a)]2, 5[∩ [4, 6]   b)]-3, 4] ∪ [1, ∞[

2. Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}$, calcule A ∪ B.

3. Sejam A =]-∞, 3] e B =]0, +∞] intervalos de números reais. Determine B ∩ A.

4. Determine, para os conjuntos a seguir:

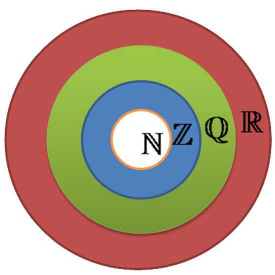
a) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$ b) $(\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}) \cup \mathbb{N}$ c) $\mathbb{R} \cup (\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q})$

RESUMO:

Nesta unidade, revisou-se a noção intuitiva de conjuntos, tipos de conjuntos, conjuntos numéricos e intervalos. A Figura 1.10 mostra uma representação esquemática dos conjuntos numéricos.

Figura 1.10: Representação esquemática dos conjuntos numéricos.

Onde $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



II

FUNÇÕES E SEUS GRÁFICOS

Na unidade 2, iremos estudar as funções e seus gráficos e, particularmente, as funções reais, isto é, relações entre quantidades que podem ser descritas por números reais. Os conteúdos desta unidade são fundamentais na matemática, e o conhecimento deste assunto alavancou o desenvolvimento em inúmeras áreas tecnológicas. Na prática, é comum encontrar situações onde se envolvem duas variáveis numéricas nas quais o valor de uma delas é dependente do valor da outra.

Relações onde a cada valor de uma das varáveis está associado somente um valor da outra variável são de grande interesse e denominadas funções. Essa noção permite a descrição e análise de relações onde se tem dependência entre quantidades. Para tanto, é extremamente importante a identificação das mesmas e o seu tratamento graficamente.

Como objetivos desta unidade, pode-se citar:

- Definir funções;
- Identificar o domínio e a imagem das funções;
- Esboçar gráficos;
- Reconhecer as funções através dos gráficos;
- Estudar os sinais das funções;
- Resolver problemas envolvendo funções.

Definição de função

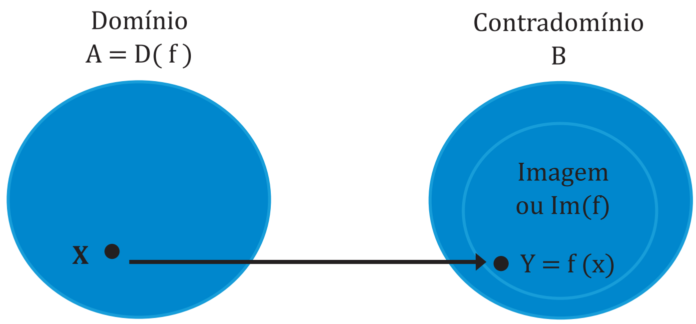
Sejam dois conjuntos não vazios A e B. Uma relação f entre A e B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. O conjunto A é chamado de **domínio da função** e o conjunto B de **contradomínio da função**.

Quando a aplicação f de A em B é uma função, representa-se em símbolos:

$$f: A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow y = f(x)$$

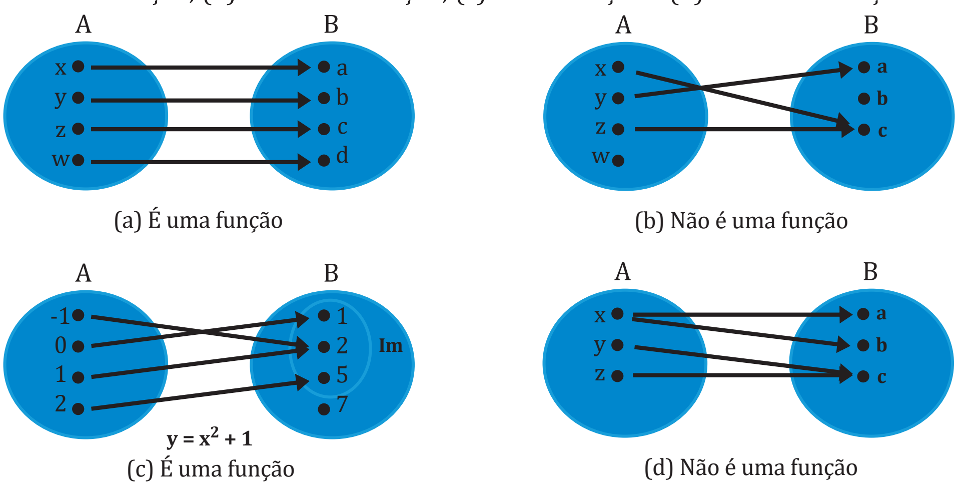
O termo $y = f(x)$ (lê-se "f de x") significa que y é uma função que depende da **variável independente x**. Logo y pode também ser chamada de **variável dependente**, pois depende de x. Quaisquer outras letras poderiam também ser utilizadas como variáveis dependente e independente. Indica-se o domínio de f por D_f (=A) e o único elemento y, associado ao elemento x, de A, pelo símbolo f(x) ou a imagem de f em x. A interpretação de uma função em diagramas de Venn pode ser vista na Figura 2.1.

Figura 2.1: Interpretação de uma função em diagramas de Venn. Note que a imagem está contida no contradomínio.



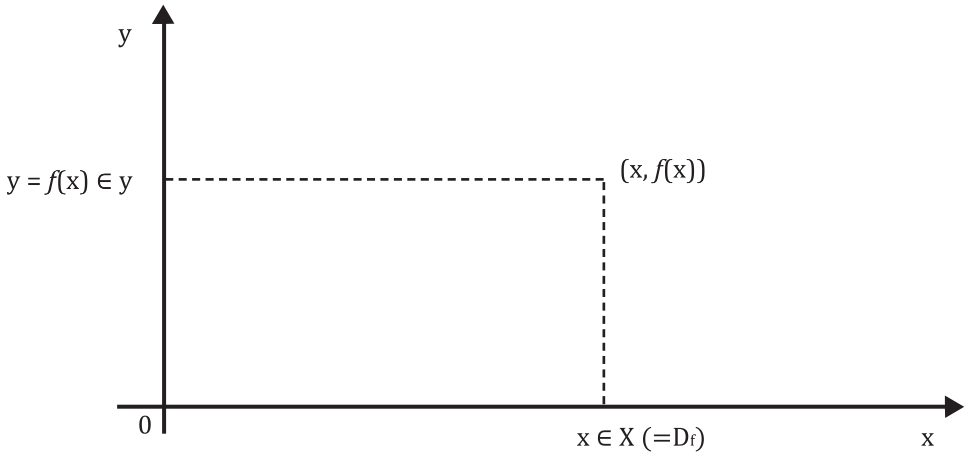
Com o auxílio do esquema de flechas, podem-se analisar melhor as condições de satisfazer uma relação f de A em B para ser uma função, assim como é apresentado na Figura 2.2. Na Figura 2.2a, observa-se um exemplo clássico de função, onde para cada elemento do conjunto A (domínio) existe um só elemento do conjunto B correspondente (contradomínio). Na Figura 2.2b, também se pode observar que para três elementos do conjunto A, existe um só elemento do conjunto B correspondente, porém, existe um elemento do conjunto A (domínio) que não possui nenhum correspondente em B, logo não se trata de uma função. No caso da Figura 2.2c, tem-se uma função, pois todos os elementos do domínio (A) são ligados a somente um elemento no contradomínio. O conjunto imagem nesse exemplo é $Im(f) = \{1, 2, 5\}$. O elemento $\{7\}$ não faz parte da imagem, pois não está ligado a nenhum elemento do domínio, mas faz parte do contradomínio $CD(f) = \{1, 2, 5, 7\}$. Observa-se que $Im(f) \subset CD(f)$. Para a Figura 2.2d, observa-se que um dos elementos do domínio está ligado a dois elementos do contradomínio, portanto, não se trata de uma função.

Figura 2.2: Representações em diagramas de Venn de quatro relações, onde: (a) é uma função; (b) não é uma função; (c) é uma função e (d) não é uma função.



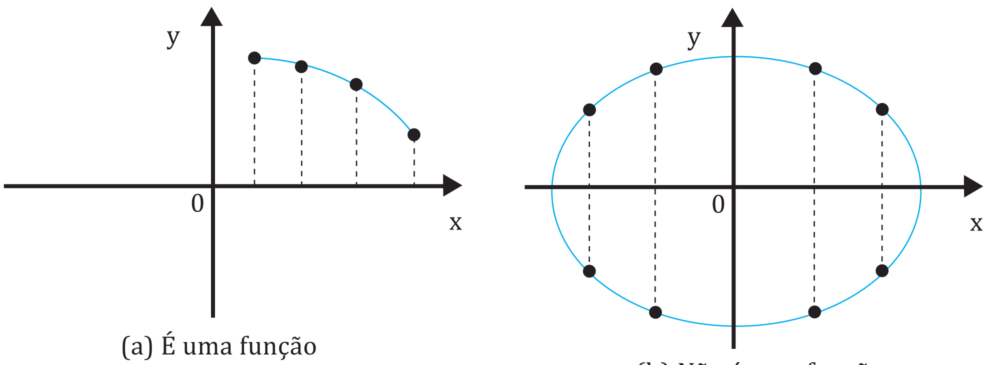
Nesta unidade, será extremamente importante a análise gráfica das funções, suas representações no plano cartesiano x-y e seu entendimento e interpretação. Na Figura 2.3, observam-se os eixos (X, Y), onde o eixo X representa o domínio da função (conjunto A) e o eixo Y representa o contradomínio da função (conjunto B). A imagem da função estará contida dentro deste contradomínio. Cada ponto de X (domínio) terá um só ponto correspondente em Y (a imagem correspondente).

Figura 2.3: Representação gráfica de uma função no plano cartesiano.



Pode-se verificar através dos gráficos se uma relação f de A em B é ou não uma função. Basta verificar se a reta paralela ao eixo Y conduzida pelo ponto (x, 0), onde x ∈ A encontra o gráfico de f em somente um ponto, pois cada ponto do domínio x deve ter somente uma imagem y correspondente. Na Figura 2.4a, observa-se que cada ponto de x tem somente um ponto de y correspondente e retas paralelas ao eixo Y em qualquer trecho de f só tocam uma vez no gráfico, sendo portanto uma função, o que não ocorre com o caso da Figura 2.4b, onde na maioria dos casos, tem-se para um valor de x, dois valores de y correspondentes, logo esse gráfico não é uma função.

Figura 2.4: Representação gráfica de uma função no plano cartesiano.



(a) É uma função

(b) Não é uma função

Função constante

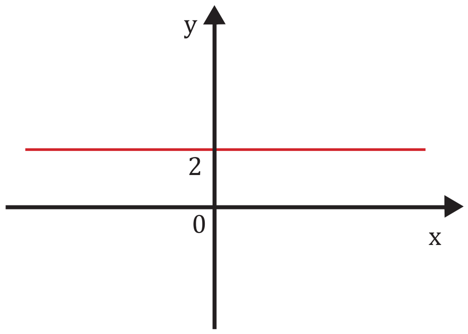
Uma função é dita constante quando tal aplicação f de ℝ em ℝ, onde qualquer que seja o elemento $x \in \mathbb{R}$, este estará associado sempre ao mesmo elemento $c \in \mathbb{R}$, ou seja

$$f(x) = c$$

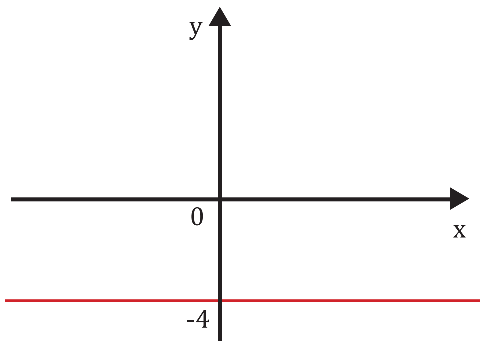
O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo X, passando pelo ponto (0, c). Logo, a imagem é o conjunto Im = {c}, pois este é o único valor de *y* para qualquer que seja o valor de *x* desde $-\infty$ a $+\infty$.

A Figura 2.5(a) mostra o gráfico referente à função y = 2, onde para qualquer que seja o valor de x, y = 2. O domínio dessa função é o conjunto dos números reais, pois *x* pode assumir qualquer valor, porém a imagem é unicamente o elemento {2}, pois para todo x, y = 2. Logo essa função é uma constante e igual a 2 e seu gráfico é uma reta passando pelo ponto y = 2 e paralela ao eixo X. Analogamente, na Figura 2.5(b), o domínio da função y = -4 é o conjunto dos números reais e a sua imagem é o elemento {-4}.

Figura 2.5: Exemplos de função constante



(a) Y = 2



(b) Y = -4

Função afim

Uma função é dita afim quando tal aplicação f de ℝ em ℝ, onde qualquer que seja o elemento $x \in \mathbb{R}$, este estará associado ao elemento $(ax+b) \in \mathbb{R}$ em que $a \neq 0$ e b são números constantes e reais dados, ou seja

$$f(x) = ax + b,\ a \neq 0$$

Exemplos:

$$y = 2x + 3, \text{ onde } a = 2 \text{ e } b = 3$$

$$y = -x + 2, \text{ onde } a = -1 \text{ e } b = 2$$

$$y = 5x, \text{ onde } a = 5 \text{ e } b = 0$$

Observa-se que, para o último exemplo, onde $b = 0$, a função afim do tipo $y = ax + b$ se torna uma função chamada linear do tipo $y = ax$, ou seja, a função linear é um caso particular da função afim. E nesse último caso, quando $a = 1$, tem-se a função identidade, onde $y = x$.

Gráfico da função afim

Para se construir o gráfico desse tipo de função, usa-se uma tabela de valores, onde se atribui valores à variável independente x e obtêm-se os valores correspondentes da função y = f(x). Na sequência, representa-se cada um dos pontos obtidos num mesmo plano cartesiano x-y, onde x é o eixo das abscissas e y o eixo das ordenadas.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Construa o gráfico das seguintes funções:

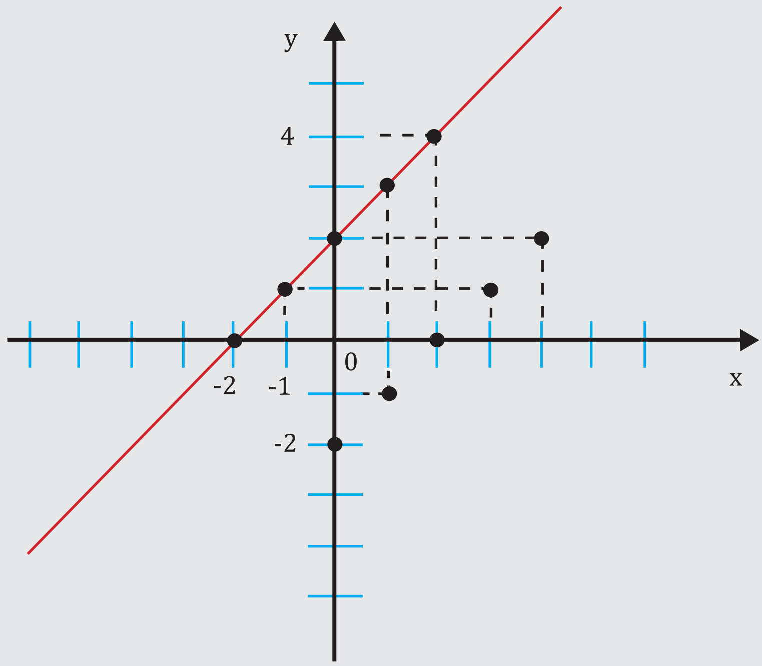
a) $f(x) = x + 2$ b) $f(x) = -2x + 1$ c) $f(x) = 3x$

Resposta:
Inicialmente, nota-se que $D(f) = \mathbb{R}$.
Em seguida, dados os pontos de x, determina-se f(x), como na tabela a seguir:

x	-2	-1	0	1	2
y = x + 2	0	1	2	3	4

Localizando esses pontos no plano cartesiano, nota-se que eles estão alinhados, formando uma reta (Figura 2.6). De fato, o gráfico de qualquer função afim é sempre uma reta.

Figura 2.6: Exemplo 1 de função afim.

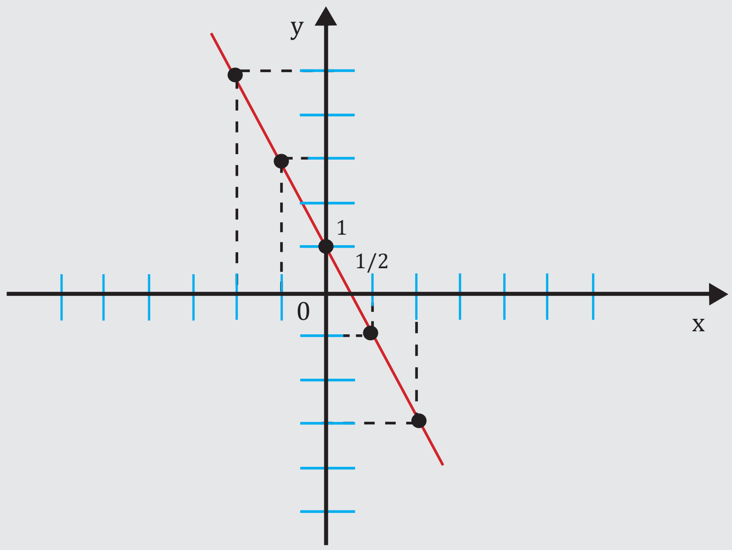


b) Mais uma vez, também no exemplo 2, tem-se que $D(f) = \mathbb{R}$.
Analogamente ao exemplo anterior, tem-se a seguinte tabela de valores:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -2x + 1$	5	3	1	-1	-3

E o gráfico para essa função tem seu esboço na Figura 2.7.

Figura 2.7: Exemplo 2 de função afim.

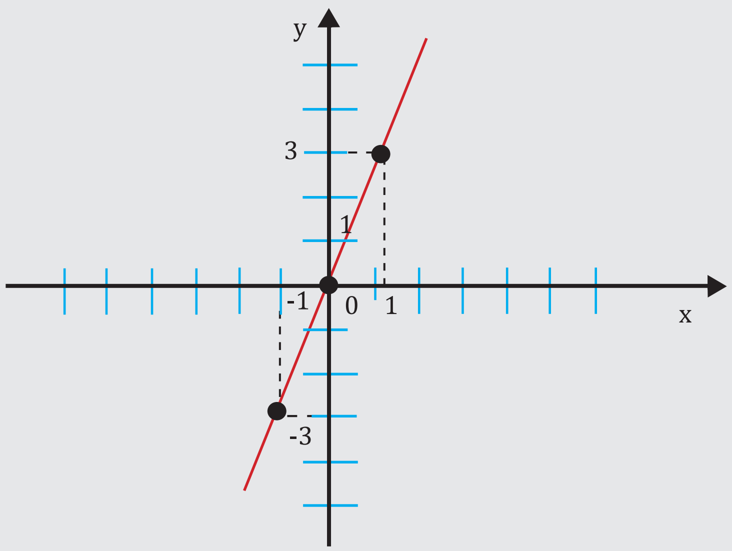


c) Mais uma vez, também no exemplo 3, tem-se que $D(f) = \mathbb{R}$.
Analogamente aos exemplos anteriores, tem-se a seguinte tabela de valores:

x	-1	0	1
$y = 3x$	-3	0	3

E o gráfico para essa função tem seu esboço na Figura 2.8. Essa função, onde se tem $b = 0$, é chamada de função linear.

Figura 2.8: Exemplo 3 de função linear.



Domínio e imagem

O valor de x pode assumir qualquer valor real. Logo para a função afim o domínio será sempre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Quanto à imagem, para esse tipo de função especificamente, tem-se também o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, pois como se trata de uma reta, qualquer que seja o valor de x, haverá um valor correspondente em y e a reta, tanto em x como em y, pode assumir valores que vão de $-\infty$ a $+\infty$.

Logo, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

Coeficientes da função afim

O coeficiente "a" da função $f(x) = ax + b$ é chamado coeficiente angular ou declividade da reta no plano cartesiano. O coeficiente "b" é chamado de coeficiente linear. O coeficiente linear "b" indica onde o gráfico corta o eixo y, pois se $a = 0$, a função ficará $y = 0x + b$, ou seja, $y = b$. Já o coeficiente angular da função dá informações sobre o crescimento da função.

Zero da função afim

Denomina-se o zero de uma função o(s) ponto(s) onde a mesma corta o eixo x, no caso da função afim, onde o gráfico é sempre uma reta, tem-se somente um zero da função. Em termos de pares ordenados, tem-se o ponto (x, 0), onde $y = f(x) = 0$, ou seja, é o ponto x quando y ou f(x) é igual a zero. Logo, se $ax + b = 0$, $x = -\frac{b}{a}$ é o zero da função, onde $a \neq 0$.

Funções crescentes ou decrescentes

Uma função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é crescente se para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$. Ou seja, significa dizer que quando se aumenta o valor de x, o valor de y também aumenta e a função é dita crescente.

Por outro lado, uma função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é decrescente se para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$. Ou seja, significa dizer que quando se aumenta o valor de x, o valor de y diminui e vice-versa e a função é dita decrescente.

Pode-se dizer também que a função $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ é crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$.

Seja $f(x) = ax + b$ e $a > 0$.

Para mostrar que f é crescente, sejam x_1 e x_2 pertencentes ao domínio de f com $x_1 < x_2$.

Para mostrar que $f(x1) < f(x2)$, primeiramente, rearranjando os termos pode-se dizer que

$$f(x_1) - f(x_2) < 0$$

$$f(x_1) = ax_1 + b \text{ e}$$

$$f(x_2) = ax_2 + b.$$

Logo $f(x_1) - f(x_2) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = a(x_1 - x_2) < 0$, pois $a > 0$ e $x_1 - x_2 < 0$.

A demonstração para uma função decrescente é feita de forma análoga e fica como exercício.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Prove que a função f(x) = x + 3 é crescente, pois a = 1 > 0 e a função f(x) = -(2/3)x é decrescente, pois a = - 2/3 < 0. Sugestão: Faça uma tabelinha com dois valores quaisquer de *x* e investigue o comportamento de *y*.

Resposta:
Para a função f(x) = x + 3, inicialmente, dados quaisquer valores de x, obtem-se os seus respectivos valores de y, como mostra a tabela abaixo:

x	-2	-1	0	1	2
y = x + 3	1	2	3	4	5

Nota-se que ao aumentar os valores de x, os valores de y = f(x) também aumentam. Tem-se, portanto, uma função crescente. Com relação à função f(x) = -(2/3)x, adota-se o mesmo procedimento e se obtém a tabela abaixo:

x	-2	-1	0	1	2
y = -(2/3)x	4/3 = 1,333...	2/3 = 0,666...	0	-2/3 = -0,666...	-4/3 = -1,333...

Nota-se que ao aumentar os valores de x, os valores de y = f(x) diminuem. Tem-se, portanto, uma função decrescente.

Estudo dos sinais

O estudo de sinais de uma função representada no plano cartesiano se faz da seguinte forma: deve-se observar a ordenada ou eixo y de uma função qualquer na forma y = f(x). Se y > 0, a função é positiva; se y < 0, a função é negativa e se y = 0 (quando a função cruza o eixo x), diz-se que esse ponto de par ordenado (x, 0) é o zero da referida função.

Observando-se uma função qualquer, na Figura 2.9, tiram-se as seguintes conclusões: os pontos x = -5; x = -1 e x = 9/2 são os zeros da função, pois eles cruzam o eixo das abscissas (eixo x). Observando agora o eixo y, tem-se que: todos os pontos à esquerda de x = -5 são positivos, pois o gráfico está acima do eixo x (as coordenadas de y são positivas). Todos os pontos entre x = -5 e x = -1 são negativos, pois as coordenadas y do gráfico nesses pontos são negativas. Seguindo o mesmo princípio, entre os pontos x = -1 e x = 9/2, a função é positiva, e para os pontos de x > 9/2, a função é negativa (os pontos de y são negativos nesse intervalo).

Figura 2.9: Função qualquer.

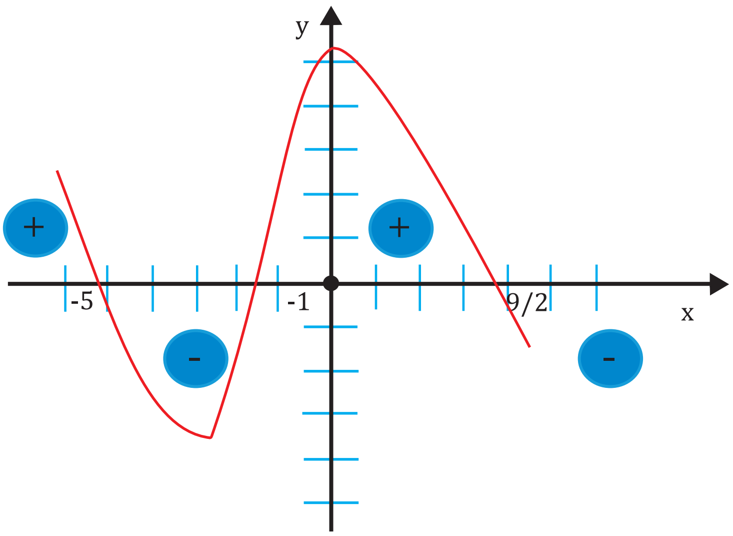
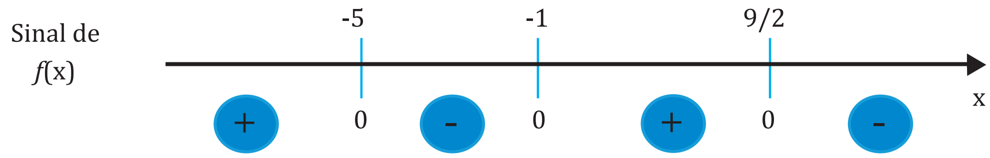


Figura 2.10: Estudo dos sinais da função da figura anterior.



Com base na Figura 2.10, conclui-se:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 9/2$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -5 \text{ ou } -1 < x < 9/2$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow -5 < x < -1 \text{ ou } x > 9/2$$

Estudar o sinal da função afim, do tipo $f(x) = ax + b$ (com $a \neq 0$), significa determinar os intervalos onde a função é igual a zero ($y = f(x) = 0$), a função é positiva ($y = f(x) > 0$) e negativa ($y = f(x) < 0$). Nesse tipo de função, a mesma será crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$.

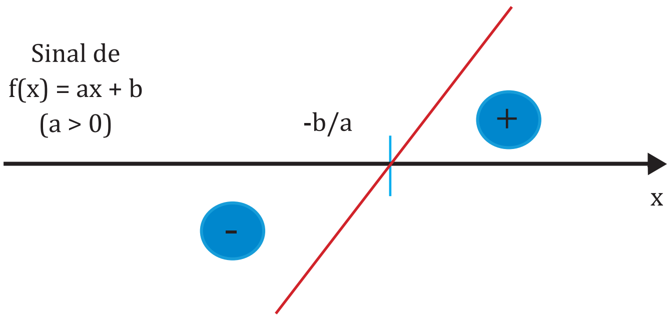
No primeiro caso ($a > 0$), tem-se:

$$f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

$$f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

Se os valores de x forem colocados sobre seu eixo, o sinal da função afim, com $a > 0$, é mostrado na Figura 2.11. Isto significa que quando $a > 0$, a função é positiva à direita de $x = -\frac{b}{a}$ e negativa à esquerda de $x = -\frac{b}{a}$.

Figura 2.11: Estudo dos sinais da função afim, do tipo f(x) = ax + b, para a > 0.



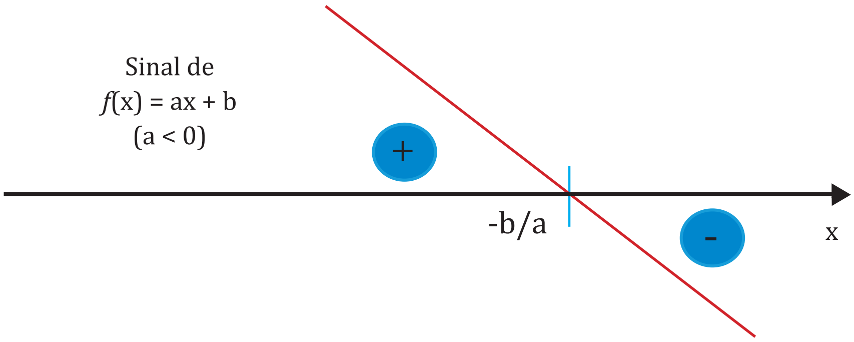
No segundo caso ($a < 0$), tem-se:

$$f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

$$f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

Se os valores de x forem colocados sobre seu eixo, o sinal da função afim, com $a < 0$, é mostrado na Figura 2.12. Isto significa que quando $a < 0$, a função é positiva à esquerda de $x = -\frac{b}{a}$ e negativa à direita de $x = -\frac{b}{a}$.

Figura 2.12: Estudo dos sinais da função afim, do tipo f(x) = ax + b, para a < 0.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

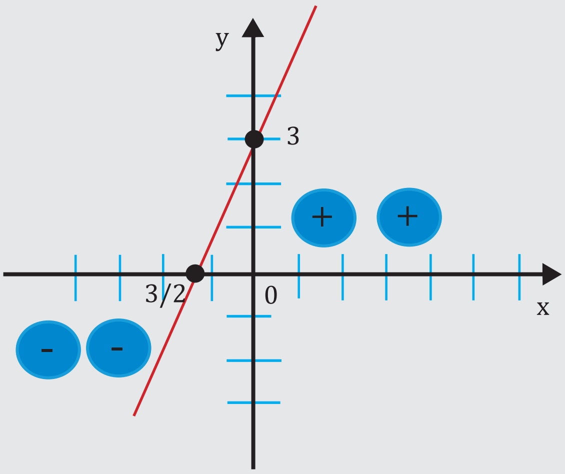
1. Faça o estudo dos sinais das seguintes funções:

a) f(x) = 2x + 3 b) f(x) = -3x + 1

Resposta:

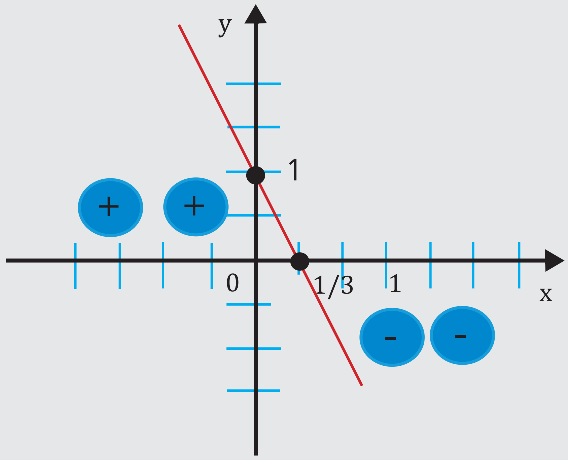
Tem-se que $a = 2 > 0$ e que $x = -\frac{3}{2}$ é seu zero. Logo, $f(x) > 0$ para $x > -\frac{3}{2}$ e $f(x) < 0$ para $x < -\frac{3}{2}$. Graficamente, tem-se que (Figura 2.13):

Figura 2.13: Estudo dos sinais da função afim f(x) = 2x + 3.



b) Tem-se que $a = -3 < 0$ e que $x = \frac{1}{3}$ é seu zero. Logo, $f(x) > 0$ para $x < \frac{1}{3}$ e $f(x) < 0$ para $x > \frac{1}{3}$. Graficamente, tem-se que (Figura 2.14):

Figura 2.14: Estudo dos sinais da função afim f(x) = -3x + 1.



Inequações

Para concluir o estudo de função afim, na sequência, serão resolvidas algumas inequações do primeiro grau que dependem, sobretudo, do estudo do sinal da função afim e das operações com intervalos. O estudo será apresentado através de exercícios resolvidos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Resolva a inequação simultânea $x - 3 < -2x + 7 < 2x + 3$

Resposta:
Em primeiro lugar, separam-se as desigualdades.

1) $x - 3 < -2x + 7$
2) $-2x + 7 < 2x + 3$

Seja S_1 o conjunto solução da primeira inequação, onde

$$x - 3 < -2x + 7 \Rightarrow x + 2x < 7 + 3 \Rightarrow 3x < 10 \Rightarrow x < \frac{10}{3}$$

Logo, $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{10}{3}\}$

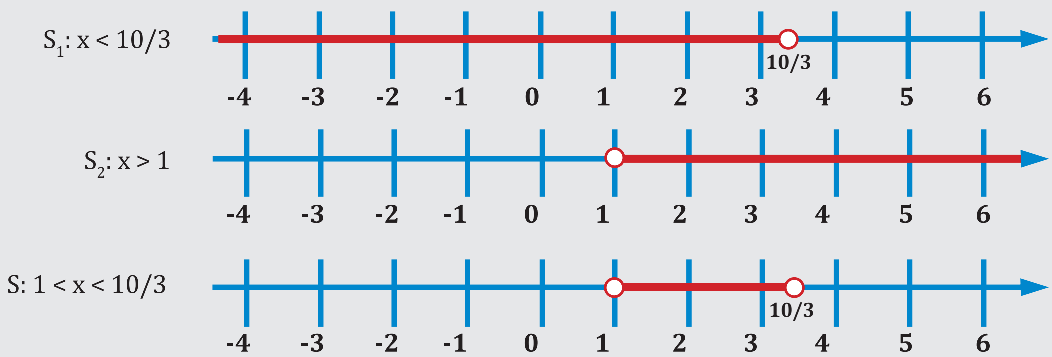
Seja S_2 o conjunto solução da segunda inequação, onde

$$-2x + 7 < 2x + 3 \Rightarrow -2x - 2x < 3 - 7 \Rightarrow -4x < -4 \Rightarrow -x < -1 \Rightarrow x > 1$$

Logo, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

Representando esses dois intervalos na reta real e determinando a interseção, chega-se à solução

$$S = S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{10}{3}\}$$

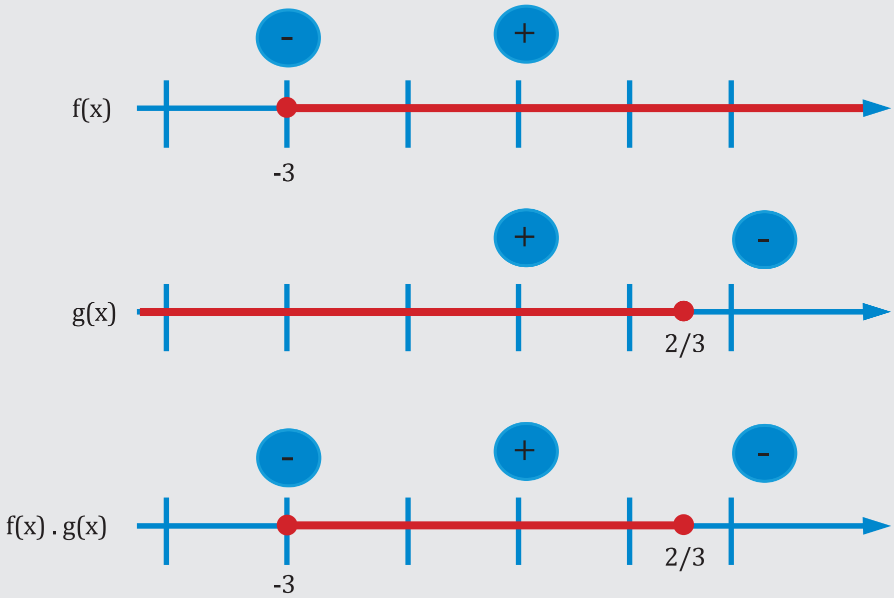


2. Resolva a inequação produto (x + 3) . (-3x + 2) ≥ 0

Resposta:
Essa inequação é chamada de produto, pois há um produto entre duas funções, o produto da função f pela função g. Deve-se fazer um estudo dos sinais de cada uma das funções e expressá-las na reta real. Em seguida, em uma terceira reta real, deve-se fazer o produto dos sinais, nos intervalos determinados pelos zeros de cada função.

1)Para f(x) = x + 3, tem-se que a = 1 > 0 (função crescente) e x = -3 é o zero de f. À esquerda de -3, a função é negativa, e à direita de -3, a função é positiva.

2) Para g(x) = -3x + 2, tem-se que a = -3 < 0 (função decrescente) e x = 2/3 é o zero de g. À esquerda de 2/3, a função é positiva, e à direita de 2/3, a função é negativa.



Após realizar o produto das funções, o conjunto solução será $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq \frac{2}{3}\}$

3. Resolva a inequação $\frac{x+3}{-3x+2} \geq 0$

Resposta:
Essa inequação apresenta um quociente entre as funções *f* e *g* do exemplo precedente, portanto os intervalos serão exatamente os mesmos que no exemplo anterior. A diferença aqui é que um quociente de uma fração não pode ser zero, portanto *g*(x) deve ser diferente de zero, ou seja, -3x + 2 ≠ 0 e x ≠ $\frac{2}{3}$. Deve-se fazer os intervalos levando em consideração essa informação e o conjunto solução será S = $\{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq \frac{2}{3}\}$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Para cada função afim abaixo, determine:

a) Os coeficientes a e b; b) O zero da função;

c) O esboço do gráfico utilizando apenas os dois pontos de intersecção com os eixos coordenados;

d) Verifique também se a função é crescente ou decrescente fazendo o estudo dos sinais da mesma.

1. $f(x) = -x + 3$
2. $f(x) = x + 4$
3. $f(x) = 4x - 3$
4. $f(x) = -\frac{x}{3} + 2$
5. $f(x) = 2x$

2. Resolva as inequações abaixo:

a) $(x - 4) . (-2x + 6) > 0$ b) $\frac{x+5}{-2x+1} \leq 0$

3. O gráfico da função $f(x) = ax + b$ passa pelos pontos (1; -1) e (3; -7). Assim, qual o valor de a + b?

Função quadrática

Uma função é dita quadrática quando tal aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, onde qualquer que seja o elemento $x \in \mathbb{R}$, este estará associado ao elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$ em que $a \neq 0$, b e c são números constantes e reais dados, ou seja

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

Exemplos:

$y = x^2 + 2x + 3$, onde a = 1, b = 2 e c = 3

$y = 3x^2 + 5x - 2$, onde a = 3, b = 5 e c = -2

$y = -5x^2 + x - 3$, onde a = -5, b = 1 e c = -3

$y = 2x^2 + 1$, onde a = 2, b = 0 e c = 1

$y = -x^2 + 4x$, onde a = -1, b = 4 e c = 0

$y = 2x^2$, onde a = 2, b = 0 e c = 0

O domínio da função quadrática é o conjunto dos números reais, $D(f) = \mathbb{R}$, pois qualquer que seja o valor que se atribua a *x*, haverá um f(x) correspondente e pertencente ao conjunto $\mathbb{R}$.

O gráfico da função quadrática é uma parábola. Seguem alguns exemplos de gráficos a seguir.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Construa o gráfico das seguintes funções:

$f(x) = x^2 + 2$

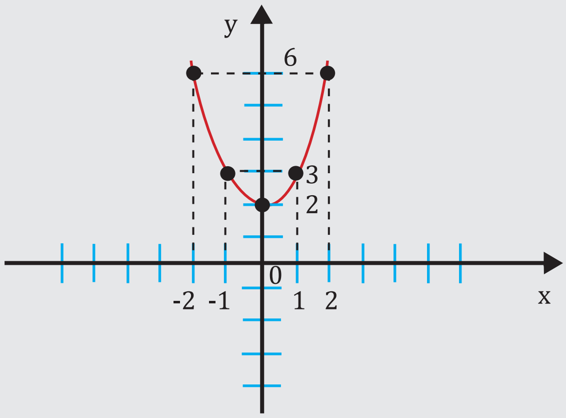
$f(x) = -x^2 + 2$

Resposta:
Inicialmente, como já explicado, sabe-se que $D(f) = \mathbb{R}$.
Em seguida, dados os pontos de *x*, determina-se f(x), como na tabela a seguir:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2 + 2$	6	3	2	3	6

Localizando esses pontos no plano cartesiano, nota-se que eles formam uma parábola (Figura 2.15). De fato, o gráfico de qualquer função quadrática é sempre uma parábola.

Figura 2.15: Exemplo 1 de função quadrática.



2. Assim como no exemplo 1 e em qualquer função quadrática, D(f) = R.

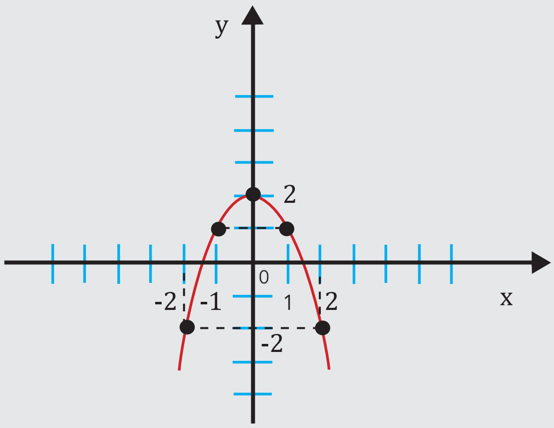
Resposta:

Em seguida, dados os pontos de *x*, determina-se f(x), como na tabela a seguir:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2 + 2$	-2	1	2	1	2

Localizando esses pontos no plano cartesiano, nota-se que eles formam uma parábola (Figura 2.16). De fato, o gráfico de qualquer função quadrática é sempre uma parábola.

Figura 2.16: Exemplo 2 de função quadrática

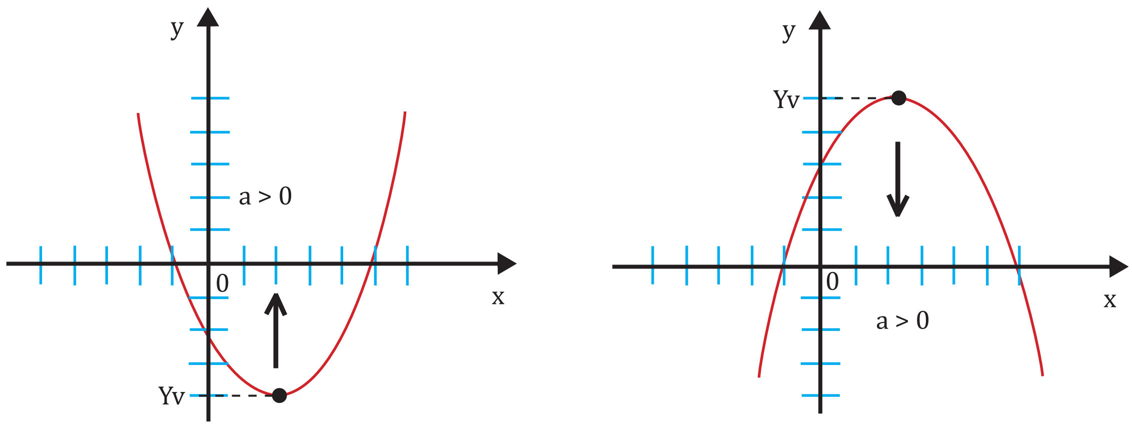


Concavidade

A função quadrática é do tipo $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ e seu gráfico é sempre uma parábola. Tal parábola pode ter concavidade voltada para cima ou para baixo.

Caso $a > 0$, a concavidade da parábola será voltada para cima, e se $a < 0$, sua concavidade será voltada para baixo. A Figura 2.17 mostra esquematicamente esse comportamento. Observa-se também nos exemplos anteriores 1 e 2, nas Figuras 2.15 e 2.16, as concavidades para cima ($a = 1 > 0$) e para baixo ($a = -1 < 0$), respectivamente.

Figura 2.17: Esboço da função quadrática do tipo $y = ax^2 + bx + c$. (a) Concavidade para cima ($a > 0$); (b) Concavidade para baixo ($a < 0$).



Forma canônica

Os gráficos das funções quadráticas dos exemplos 1 e 2 mostrados nas Figuras 2.15 e 2.16 são obtidos através das tabelas de valores, onde supomos um valor qualquer de x, visto que o domínio é o conjunto dos números reais e obtêm-se os valores de $y = f(x)$.

No caso das funções quadráticas, nem sempre esse procedimento será o mais adequado para a obtenção dos gráficos, pois em geral atribuem-se números inteiros para x, e tanto o vértice (valor máximo ou mínimo da parábola) pode ter uma coordenada não inteira, assim como os seus zeros (pontos que cortam o eixo x).

Para se estudar mais detalhadamente a função quadrática, primeiramente, deve-se transformá-la em outra forma mais conveniente que se chama forma canônica.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

O termo $b^2 - 4ac$ é o famoso discriminante do trinômio do segundo grau, representado por Δ e a forma canônica é escrita da seguinte forma:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$$

Zeros

Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$, logo são as soluções da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Usando a forma canônica,

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x=-\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Observa-se que se $\Delta > 0$, a equação terá duas raízes reais e distintas que são:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

o que significa dizer que no gráfico, a parábola irá cortar em dois pontos o eixo x.

Caso $\Delta = 0$, as duas raízes da equação do 2º grau serão iguais:

$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$$

Logo, a parábola, nesse caso, irá cortar em um ponto o eixo x, no seu vértice (ponto de máximo ou ponto de mínimo) que será visto em detalhes mais adiante.

E no terceiro caso, em que $\Delta < 0$, onde nesse caso $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, a equação não possui raízes reais. A parábola não irá cortar o eixo x em nenhum ponto.

Máximo e mínimo: vértice da parábola

Sabe-se que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola, que assume um valor extremo (máximo ou mínimo).

Um número $y_m \in Im(f)$ é o **valor mínimo** da função $y = f(x)$ quando $y_m \leq y$ para qualquer ponto y dessa função onde $y_m \in Im(f)$. O valor de $x_m \in D(f)$ e $y_m = f(x_m)$. O ponto (x_m, y_m) é o **mínimo da função**.

Um número $y_M \in Im(f)$ é o **valor máximo** da função $y = f(x)$ quando $y_M \geq y$ para qualquer ponto y dessa função onde $y_M \in Im(f)$. O valor de $x_M \in D(f)$ e $y_M = f(x_m)$. O ponto (x_M, y_M) é o **máximo da função**.

Quando $a > 0$, a função terá concavidade para cima, ou seja, ter-se-á um **ponto mínimo** no gráfico e o mesmo é o **vértice da função** (indicado como Y_v na Figura 2.17a), onde $y_m=-\frac{\Delta}{4a}$ e $x_m=-\frac{b}{2a}$

Por outro lado, se na função quadrática, $a < 0$, a concavidade da mesma será para baixo e nesse caso, ter-se-á um **ponto máximo** para a função que é o seu **vértice** (indicado como Y_v na Figura 2.17b), onde $y_M=-\frac{\Delta}{4a}$ e $x_M=-\frac{b}{2a}$

Para a demonstração desses valores, considera-se primeiramente a função quadrática na sua forma canônica

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$$

Considerando a < 0, e observando que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, para qualquer valor de x, pois a expressão está ao quadrado. Além disso $-\frac{\Delta}{4a^2}$ é um valor constante para uma dada função "y" e assumirá um valor máximo quando a diferença $\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$ for a menor possível (negativa) e a é negativo. Ao se multiplicarem esses valores, teremos um valor máximo e positivo. Como o primeiro termo é sempre positivo, a menor diferença desse termo será, então, quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$. Para $x = -\frac{b}{2a}$:

$$y = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right] \Rightarrow y = -\frac{\Delta}{4a}$$

Quando a > 0, a determinação do ponto mínimo é demonstrada de forma análoga.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine os valores máximo ou mínimo das seguintes funções reais:

a)f(x) = $5x^2 - 5x - 9$ b) f(x) = $-2x^2 + 2x + \frac{4}{5}$

Resposta:
a) Para o primeiro item, tem-se que: a = 5; b = -5 e c = -9.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)2 - 4.5.(-9) \Rightarrow \Delta = 205$$

Como a = 5 > 0, a função admite um **valor mínimo**, onde:

$$x_m = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 \cdot 5} \Rightarrow x_m = \frac{1}{2}$$

$$y_m = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{205}{4 \cdot 5} \Rightarrow y_m = -\frac{41}{4}$$

2)Para o segundo item, tem-se que: a = -2; b = 2 e $\frac{4}{5}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)2 - 4 \cdot (-2) \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \Delta = \frac{52}{5}$$

Como a = -2 < 0, a função admite um **valor máximo**, onde:

$$x_M = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-2)} \Rightarrow x_M = \frac{1}{2}$$

$$y_M = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\frac{52}{2}}{4 \cdot (-2)} \Rightarrow y_M = \frac{13}{4}$$

Imagem

Para determinar o conjunto imagem de uma função quadrática, mais uma vez, deve-se partir da forma canônica da função quadrática

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

Pode-se observar que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, pois o termo está elevado ao quadrado e qualquer termo elevado ao quadrado, seja ele positivo ou negativo, resultará em um número positivo. Serão considerados, então, dois casos:

1º caso:

$$a>0 \Rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \text{ logo } y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$$

Ou seja, $y \geq -\frac{\Delta}{4a}$ para que o termo $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \geq 0$ visto que o primeiro termo $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ já é positivo quando $a > 0$.

2º caso:

$a<0 \Rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ pois $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ e $a < 0$, então essa multiplicação resultará em um termo negativo ou nulo.

Portanto $y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$. Ou seja, $y \leq -\frac{\Delta}{4a}$ para que o termo $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \leq 0$ visto que o primeiro termo $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ já é negativo quando $a < 0$. Para melhor visualizar, se $x = 0$, $y = -\frac{\Delta}{4a}$ e para $x \neq 0$ (sendo x positivo ou negativo), $y \leq -\frac{\Delta}{4a}$

Os conjuntos imagem serão dados então por:

$$a>0 \Rightarrow Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

$$a<0 \Rightarrow Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine o conjunto imagem de cada uma das funções quadráticas listadas abaixo:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$

b) $f(x) = -2x^2 - 10x + 12$

Resposta:

a) Para o primeiro item, tem-se que: a = 1; b = -2 e c = - 8.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) \Rightarrow \Delta = 36$$

E portanto:

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{4 \cdot 1} = -9 = y_m$$

Como a = 1 > 0, tem-se:

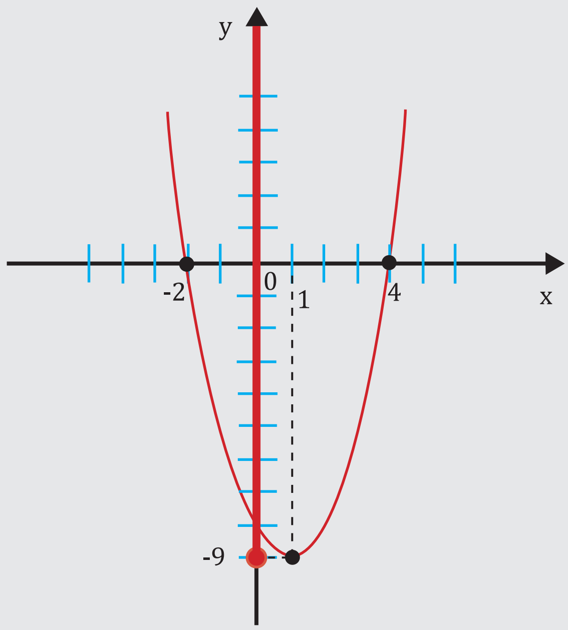
$$\text{Im}(f)=\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -9\}$$

Calculando-se a coordenada x do vértice:

$$x_m = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (1)} \Rightarrow x_m = 1$$

Os zeros da função são: x_1=-2 e x_2=4, que são justamente os pontos onde a função corta o eixo x. Tendo esses valores, pode-se esboçar o gráfico e visualizar a imagem da função (Figura 2.18).

Figura 2.18: Esboço da função quadrática f(x) = x^2 – 2x – 8 com a ilustração do intervalo que corresponde ao seu conjunto imagem



b) Para o segundo item, tem-se que: a = -2; b = -10 e c = 12.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (12) \Rightarrow \Delta = 196$

E portanto:

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{196}{4 \cdot (-2)} = 24{,}5 = y_M$$

Como a = -2 < 0, tem-se:

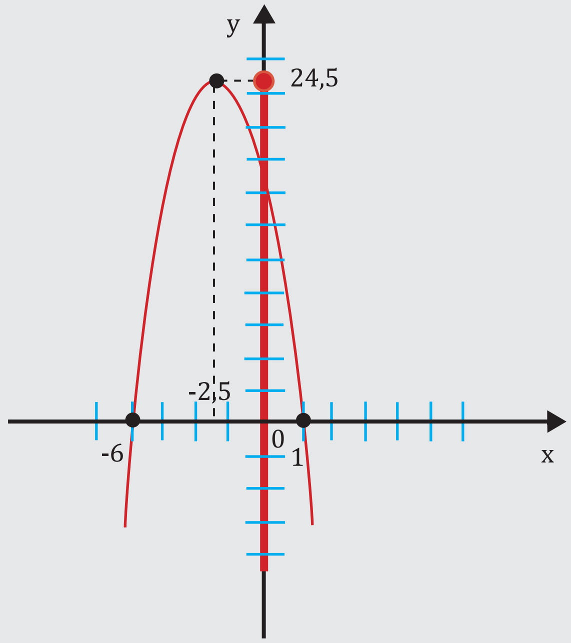
$$\text{Im}(f)=\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 24{,}5\}$$

Calculando-se a coordenada x do vértice:

$$x_m = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \cdot (-2)} \Rightarrow x_M = -2{,}5$$

Os zeros da função são: $x_1 = -6$ e $x_2 = 1$, que são justamente os pontos onde a função corta o eixo x. Tendo esses valores, pode-se esboçar o gráfico e visualizar a imagem da função (Figura 2.19)

Figura 2.19: Esboço da função quadrática $f(x) = -2x^2 - 10x + 12$ com a ilustração do intervalo que corresponde ao seu conjunto imagem.



Eixo de simetria

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola que tem um eixo de simetria vertical no seu vértice, ou seja, tudo que está à esquerda do vértice pode ser "espelhado" para a direita do mesmo. Isso significa que o eixo de simetria (reta pontilhada vertical que passa pelo vértice: Figura 2.20) é a reta vertical $x = \frac{-b}{2a}$ que corresponde à abscissa do vértice da função. Isso quer dizer que os pontos à direita e à esquerda desse eixo de simetria são equidistantes e $f(x_v + r) = f(x_v - r)$ qualquer que seja o valor de $r \in \mathbb{R}$ e $x_v = \frac{-b}{2a}$

Se calcularmos $f\left(\frac{b}{2a} - r\right)$ utilizando a forma canônica da função, temos o seguinte resultado:

$$f\left(\frac{b}{2a} - r\right) = a\left[\left(\frac{-b}{2a} - r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$$f\left(\frac{b}{2a} - r\right) = a\left[(-r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

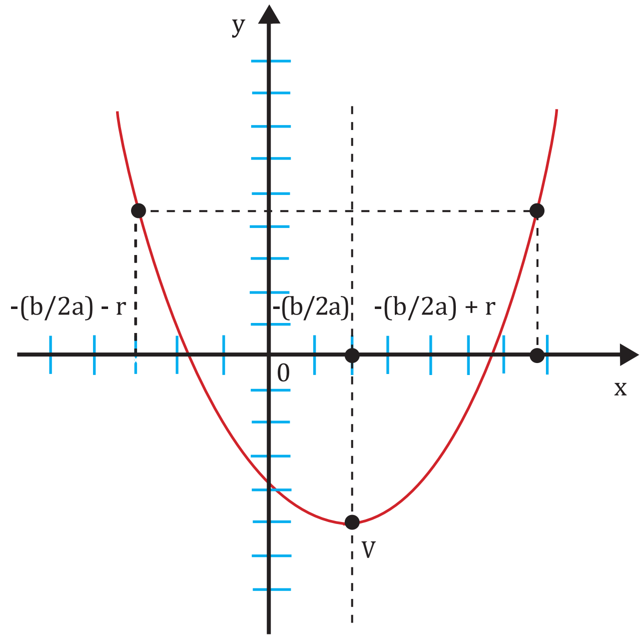
$$f\left(\frac{b}{2a} - r\right) = a\left[(r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$$f\left(\frac{b}{2a} - r\right) = a\left[\left(\frac{-b}{2a} + r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$$f\left(\frac{b}{2a} - r\right) = f\left(\frac{b}{2a} + r\right)$$

Provando que a abscissa $x = \left(\dfrac{b}{2a} + r\right)$ também pertence ao gráfico da função.

Figura 2.20: Tipos de gráficos de funções quadráticas que se pode obter.



Informações que auxiliam a construção do gráfico

Na função afim vista anteriormente, para se construir o seu gráfico, bastava escolher qualquer valor de x e calcular f(x). No caso da função quadrática, têm-se algumas informações que vão nos auxiliar bastante na construção dos mesmos.

1. Sabe-se que o gráfico é uma parábola e que ele tem um eixo de simetria vertical que passa pelo seu vértice e é a reta $x = -\dfrac{b}{2a}$
2. Quando $a > 0$, a parábola tem concavidade para cima.
3. Quando $a < 0$, a parábola tem concavidade para baixo.
4. Calculam-se os zeros da função.

   a) Caso $\Delta > 0$, a parábola vai interceptar o eixo x nos seguintes pontos:

   $$R1\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},0\right) \text{ e } R2\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},0\right)$$

   b) Caso $\Delta = 0$, a parábola cortará o eixo x em somente um ponto: $V\left(\dfrac{-b}{2a},0\right)$.

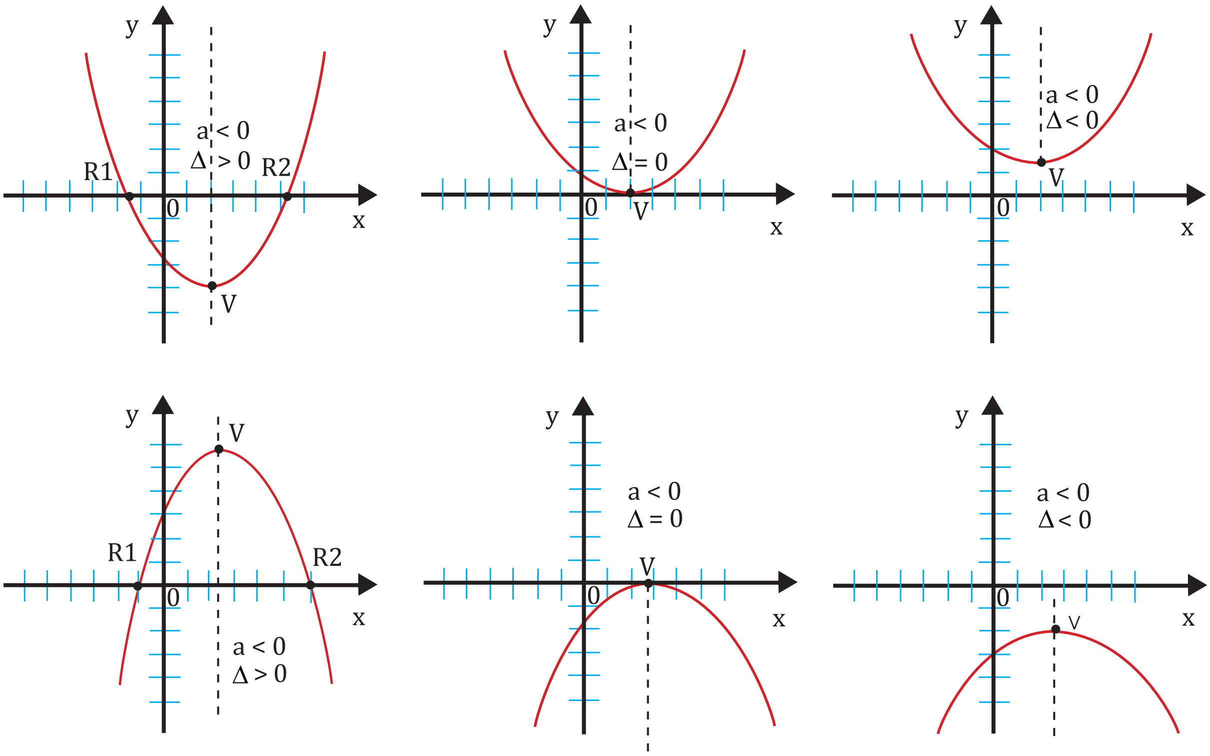
   Esse ponto é o vértice da função, e logo a parábola tangencia o eixo x no mesmo.

   c) Caso $\Delta < 0$, a parábola não tem pontos no eixo x.

5. O vértice da função é o ponto $V\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{-\Delta}{4a}\right)$, que é o máximo se $a < 0$ ou é o mínimo se $a > 0$.

Os tipos de gráficos de função quadrática que se pode obter são ilustrados na Figura 2.21.

Figura 2.21: Tipos de gráficos de funções quadráticas que se pode obter.



Sinais da função

Considerando a função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, deve-se analisar para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a função é:

a) $f(x) > 0$; b) $f(x) < 0$; c) $f(x) = 0$?

Para tanto, deve-se estudar o sinal da função quadrática para cada $x \in \mathbb{R}$. Para o estudo dos sinais da função, deve-se, em primeiro lugar, calcular o valor do discriminante e em seguida analisar os três casos distintos:

a) $\Delta < 0$ b) $\Delta = 0$; d)$\Delta > 0$

1º caso: $\Delta < 0$

Se $\Delta < 0$, então $-\Delta > 0$. Pela forma canônica da função, tem-se que:

$$f(x) = a^2\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$$

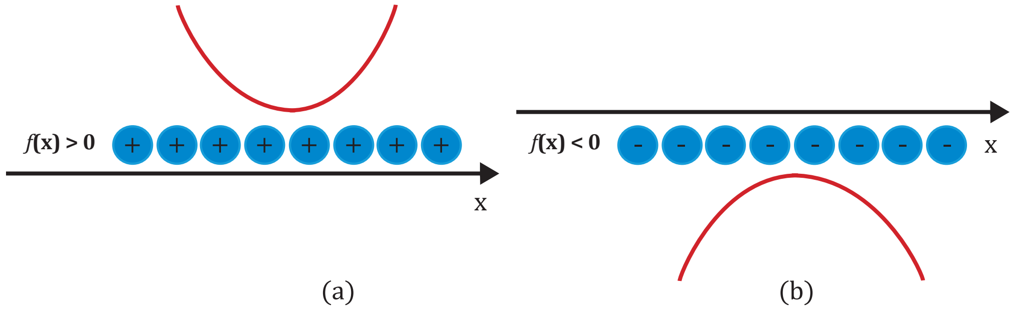
Nota-se que $a^2 > 0$; $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 > 0$ e $\left(\frac{\Delta}{4a^2}\right) > 0$. Logo a $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Isso significa dizer que a função quadrática, quando $\Delta < 0$, tem o sinal de a para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja:

$a > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$a < 0 \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Graficamente, pode-se observar na Figura 2.22a que quando a > 0, a função tem concavidade para cima. Como $\Delta < 0$, a mesma não toca o eixo *x* e logo, todos os seus valores de $y = f(x)$ são positivos. Quando a < 0 (Figura 2.22b), tem-se a função inteiramente negativa.

Figura 2.22: Sinais da função quadrática para Δ < 0 (gráfico não corta o eixo x) e: (a) a > 0 e (b) a < 0.



2º caso: $\Delta = 0$

Pela forma canônica da função, tem-se que:

$$a \; f(x) = a^2\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{0}{4a^2}\right)\right] = a^2\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

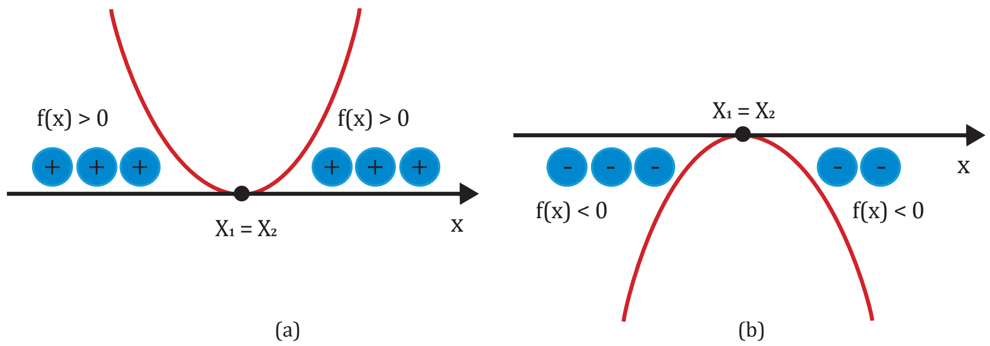
Nota-se que $a^2 > 0$; $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 > 0$ e $\left(\frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0$. Logo a $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ se $a > 0$. Isso significa dizer que a função quadrática, quando $\Delta = 0$, tem o sinal de a para todo $x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$, sendo $x_1 = -\frac{b}{2a}$ e $x_1 = x_2$ são as duas raízes da função que coincidem com o vértice da função, logo

$a > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (a função será zero somente no seu vértice)

$a < 0 \Rightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (a função será zero somente no seu vértice)

Graficamente, pode-se observar na Figura 2.23a que quando a > 0, a função tem concavidade para cima. Como Δ=0, a mesma toca o eixo *x* uma vez, pois a função possui duas raízes reais e iguais que coincidem com o seu vértice, logo o gráfico tangencia ou toca o eixo *x* no mesmo e todos os seus valores de *y* são positivos, menos no vértice onde *y* é nulo. Quando a < 0 (Figura 2.23b), tem-se a função inteiramente negativa, menos no seu vértice onde a mesma é nula.

Figura 2.23: Sinais da função quadrática para Δ = 0 (as duas raízes reais são iguais e coincidem com o vértice, logo o gráfico tangencia ou toca o eixo x no mesmo) e: (a) a > 0 e (b) a < 0.



3º caso: $\Delta > 0$

Pela forma canônica da função, tem-se que:

$$a \cdot f(x) = a^2\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

$$a \cdot f(x) = a^2\left[\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

A forma canônica pode ser transformada em:

$$a \cdot f(x) = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right] = a^2 (x - x_1)(x - x_2)$$

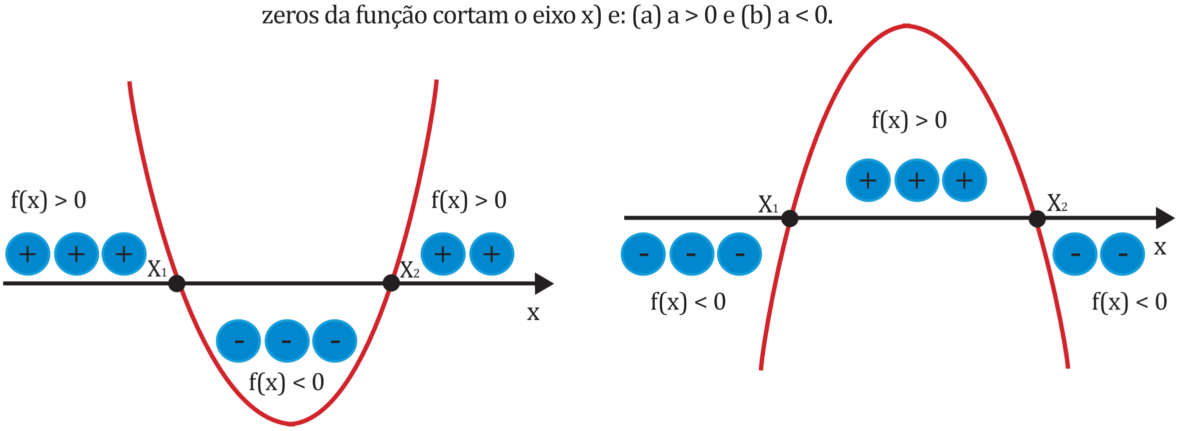
onde:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

O estudo do sinal para esse caso é bem mais interessante. Este será dado como exercício para o leitor verificar que:

1. O sinal de f (x) é o sinal de *a* para todo *x*, tal que $x < x_1$ ou $x > x_2$. Ou seja, é o sinal de *a* fora do intervalo compreendido entre as raízes x_1 e x_2 (Figura 2.24).
2. O sinal de f (x) é o sinal de –*a* para todo *x*, tal que $x_1 < x < x_2$, isto é, entre as raízes x_1 e x_2 (Figura 2.24).

Figura 2.24: Sinais da função quadrática para Δ > 0 (as duas raízes reais ou zeros da função cortam o eixo x) e: (a) a > 0 e (b) a < 0.



(a) (b)

Inequações

Por fim, conclui-se o estudo preliminar sobre a função quadrática resolvendo inequações do tipo $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$ $(a \neq 0)$, que são denominadas inequações do segundo grau.

Tal estudo depende essencialmente do sinal da função quadrática, que foi visto no tópico anterior. Os exemplos seguintes ilustrarão como devem ser resolvidas questões desse assunto.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Resolver as inequações listadas abaixo:

a) $x^2 - 2x + 3 > 0$ b) $(x^2 - 2x + 3).(-2x^2 - 10x + 12) \geq 0$

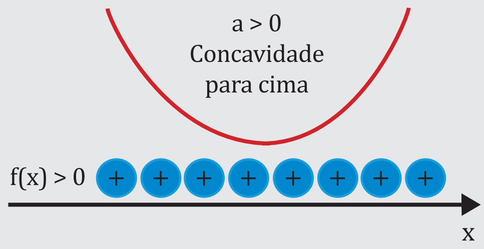
Resposta

a) Para o primeiro item, tem-se que: a = 1; b = -2 e c = 3.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3) \Rightarrow \Delta = -8.$$

Logo, $\Delta < 0$ e essa função não possui raízes reais, o que significa que ela não cortará o eixo x em nenhum ponto. Como $a > 0$, a função terá concavidade para cima. Então, conclui-se que ela será toda positiva, como ilustra a Figura 2.25. Portanto, $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Como a inequação de interesse é $f(x) > 0$, temos que $S = \mathbb{R}$.

Figura 2.25: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Note que o gráfico não toca o eixo x, pois $\Delta < 0$. Além do mais, a função tem concavidade para cima, pois $a = 1 > 0$. Logo, a função será toda positiva.



b) No segundo caso, trata-se de uma inequação produto. A primeira função é a mesma do exercício resolvido anterior, logo, já se tem o seu conjunto solução. Para a segunda função, tem-se que: a = -2; b = -10 e c = 12.

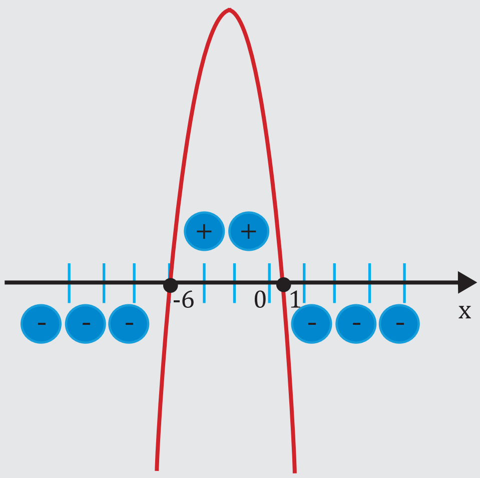
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (12) \Rightarrow \Delta = 196$$

Como $\Delta > 0$, a função possui duas raízes reais, que são:

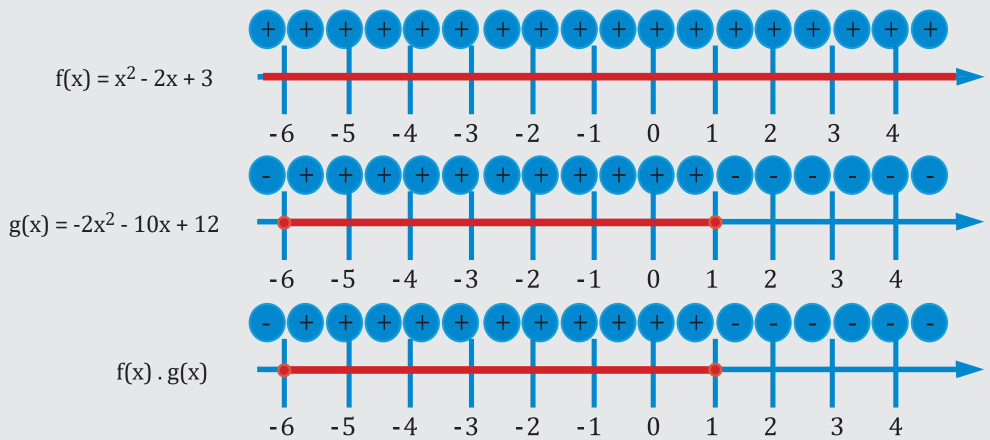
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - 14}{-4} = 1$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + 14}{-4} = -6$$

Os zeros da função são: $x_1 = 1$ e $x_2 = -6$, que são justamente os pontos onde a função corta o eixo x. Os sinais dessa segunda função são ilustrados na Figura 2.26.

Figura 2.26: Esboço do gráfico da função $f(x) = -2x^2 - 10x + 12$. Note que o gráfico corta o eixo x nas suas duas raízes, $x_1 = -6$ e $x_2 = 1$. Além do mais, a função tem concavidade para baixo, pois $a = -2 < 0$. Logo, a função será positiva para $-6 < x < 1$ e negativa para $x < -6$ e $x > 1$.



Para solucionar a inequação produto, colocam-se os sinais de cada função em retas distintas e depois se faz a interseção das mesmas, onde o conjunto solução será os valores maiores ou iguais a zero.



Como os valores que nos interessam são aqueles que $f(x) \cdot g(x) \geq 0$. O conjunto solução será, portanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 1\}$$

2. Para as funções quadráticas, determine:

i) $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 8x - 13$ ii) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

a) Os zeros da função; b) O vértice da função; c) O gráfico;

d) O estudo dos sinais da função; e) O domínio e a imagem.

Resposta:

i) $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 8x - 13$

a) Os zeros da função são calculados da seguinte forma:

$$f(x) = 0$$

$$-\frac{3}{4}x^2 - 8x - 13 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-13) \Rightarrow \Delta = 25$$

Como $\Delta > 0$, a função possui duas raízes reais, que são:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - 5}{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 + 5}{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{26}{3}$$

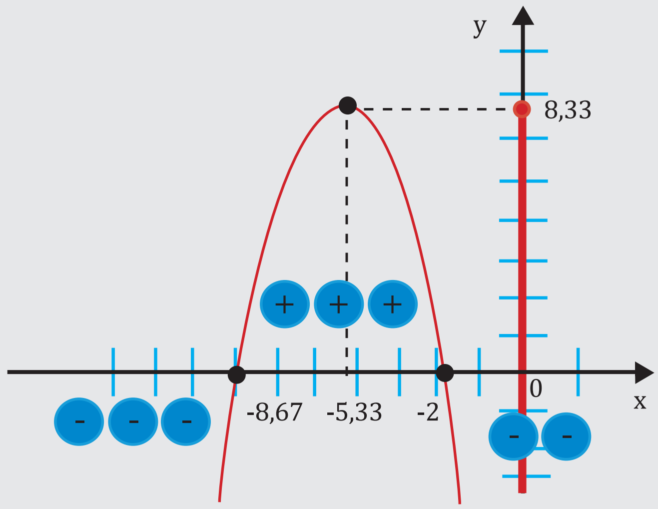
b) O vértice da função, nesse caso, será o máximo da função, pois $a < 0$ e a função tem concavidade para baixo e é calculada da seguinte maneira:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{16}{3}$$

$$y_V = \frac{\Delta}{4a} = \frac{-25}{4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{25}{3}$$

c) Para o gráfico da função, já se tem três pontos, que são: o vértice $V\left(-\frac{16}{3},\frac{25}{3}\right)=V\left(-5{,}33;8{,}33\right)$, e os zeros da função: $\left(-\frac{16}{3},0\right)$ e (−2; 0). A Figura 2.27 mostra o esboço do gráfico.

Figura 2.27: Esboço do gráfico da função f(x) = $-\frac{3}{4}x^2$ - 8x – 13.



d) O estudo dos sinais da função pode ser observado também na Figura 2.27.

f(x) > 0: -8,67 < x < -2
f(x) < 0: x < -8,67 ou x > - 2
f(x) = 0: x = -8,67 ou x = -2

e) A função pode assumir qualquer valor de x, logo D = ℝ
Quanto à imagem, como a = $-\frac{3}{4}$ < 0, tem-se:

$$a<0 \Rightarrow Im(f)=\left\{y\in\mathbb{R}\mid y\leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

Im(f) = {y ∈ ℝ | y ≤ -8,33}, como se pode observar também na Figura 2.27.

Questão 2

ii) f(x) = x^2 - 2x + 1

a) Os zeros da função são calculados da seguinte forma:

$$f(x) = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 \Rightarrow \Delta = 0$$

Como Δ = 0, a função possui duas raízes reais e iguais, que são:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\pm 0}{2(1)}=1$$

b) O vértice da função, nesse caso, será o mínimo da função, pois a > 0 e a função tem concavidade para cima e é calculada da seguinte maneira:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2\cdot(1)} = 1$$

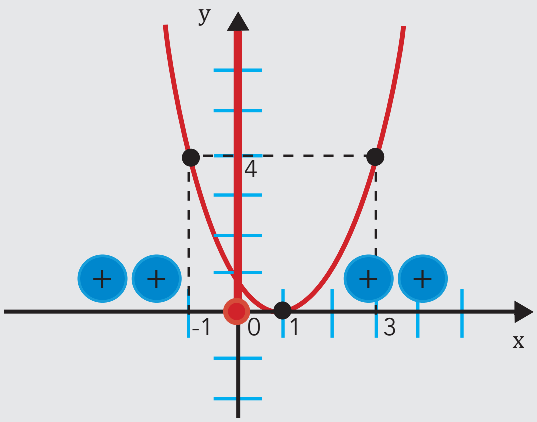
$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{0}{4\cdot(1)} = 0$$

Observe que o vértice V(1; 0) se confunde com as duas raízes da função, ou seja, as duas raízes reais da função e o vértice da mesma são o mesmo ponto.

c) Para o gráfico da função, já se tem um ponto: V (1; 0) e sabe-se que a concavidade da mesma é para cima. Para traçar o esboço do gráfico, pode-se, através de uma tabela, definir pelo menos mais dois outros pontos: um anterior ao vértice e outro posterior. Abaixo, tem-se uma tabela com a escolha de mais dois pontos além do vértice. A Figura 2.28 mostra o esboço do gráfico.

x	-1	1	3
$y = x^2 - 2x + 1$	4	0	4

Figura 2.28: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x + 1$.



d) O estudo dos sinais da função pode ser observado também na Figura 2.28.

f(x) > 0: x < 1 ou x > 1
f(x) < 0: a função não é negativa para nenhum valor de x
f(x) = 0: x = 1

e) A função pode assumir qualquer valor de x, logo D = $\mathbb{R}$

Quanto à imagem, como a = 1 > 0, tem-se:

$$a > 0 \Rightarrow Im(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

Im(f) = {y ∈ $\mathbb{R}$ | y ≥ 0}, como se pode observar também na Figura 2.28.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Para as funções quadráticas, determine:

a) Os zeros da função; b) O vértice da função; c) O gráfico;

d) O estudo dos sinais da função; e) O domínio e a imagem.

1) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ 2) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ 3) $f(x) = -3x^2 + 3x - 3$

4) $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$ 5) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 6) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

7) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

2. Resolva as inequações abaixo:

a) $(-4x^2 + 12x - 9) \cdot (x^2 - 3x + 2) > 0$ b) $\frac{-3x^2 + 3x - 3}{-2x^2 + 3x + 2} \leq 0$

3. Qual é a função do 2º grau cuja única raiz é -3 e cujo gráfico passa pelo ponto A (-2,5)?

Função modular

Definição de módulo ou valor absoluto de um número real

Seja $x \in \mathbb{R}$, a definição de módulo ou valor absoluto de x, que é representado por |x|, é dada por:

$$|x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ ou \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$$

A partir dessa definição, pode-se concluir que:

1) O módulo de um número real não negativo (positivo ou nulo) é igual ao próprio número;

2) O módulo de um número real negativo é igual ao oposto desse número.

Exemplos:

1) $|+6| = +6$, pois $+6 > 0$; 2) $|\pi| = \pi$, pois $\pi > 0$; 3) $|-4| = -(-4) = +4$, pois $-4 < 0$;

4) $\left|-\frac{4}{5}\right| = \frac{4}{5}$ 5) $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ 6) $|0| = 0$, pois $0 = 0$.

Propriedades do módulo de um número real

Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, têm-se as seguintes propriedades para o módulo:

1) $|x| \geq 0$;

2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

4) $|x|^2 = x^2$

5) $x \leq |x|$

6) $|x + y| = |x| + |y|$

7) $|x - y| = |x| - |y|$

8) Para $a > 0$ $(a \in \mathbb{R})$, $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$;

9) Para $a > 0$ $(a \in \mathbb{R})$, $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

10) Para $a > 0$ $(a \in \mathbb{R})$, $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Para cada uma das propriedades acima, atribua números quaisquer e prove a validade dessas propriedades.

Definição de função modular

Uma função é dita modular quando tal aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $|x| \in \mathbb{R}$, ou seja

$$f(x) = |x|$$

Usando o conceito de módulo de um número real, a função modular pode ser definida da seguinte maneira:

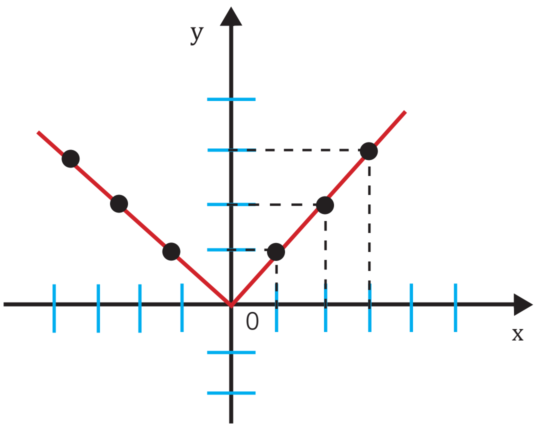
$$f(x) = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$$

Observe que se têm duas funções: a primeira, com seu domínio compreendendo os números positivos e o zero da função, $D(f_1) = \mathbb{R}_+$, ao passo que a segunda função tem como domínio os números negativos, $D(f_1) = \mathbb{R}^*_-$. $D(f) = D(f_1) \cup D(f_2) = \mathbb{R}$. Pode-se reescrever a definição da função modular da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x, se\ x \geq 0 \\ f_2(x) = -x, se\ x < 0 \end{cases}$$

As duas funções, que juntas compreendem a função modular, nesse caso, é a reunião de duas semiretas de origem O, que são bissetrizes do 1º e 2º quadrantes. O esboço desse gráfico é mostrado na Figura 2.29.

Figura 2.29: Esboço do gráfico da função f(x) = |x|.



A imagem desta função é $Im = \mathbb{R}_+$, pois a função assume somente valores reais e não negativos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) f(x) = |2x| b) f(x) = |x + 2| c) f(x) = |x – 1| + 2

d) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

Resposta:

a) Pela definição de módulo, tem-se que:

$$f(x)=|2x|\begin{cases}+(2x), se\, 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0\\ -(2x), se\, 2x < 0 \Rightarrow x < 0\end{cases}$$

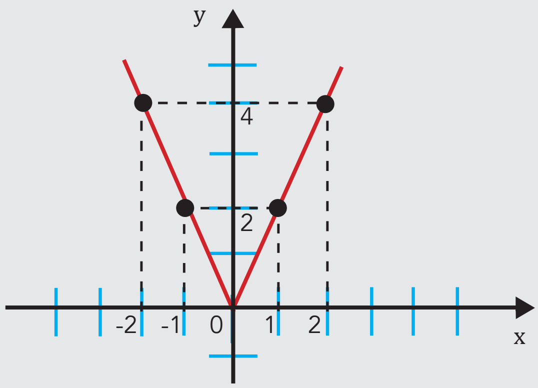
Portanto,

$$f(x)=|2x|\begin{cases}f_1(x)=2x, se\, x \geq 0\\ f_2(x)=-2x, se\, x < 0\end{cases}$$

Fazendo o gráfico das funções y = f_1 (x) e y = f_2(x), em seus domínios, a partir da tabela abaixo, tem-se a reunião das duas semiretas que se encontram no ponto (0,0). Observe que a função 1 é válida para os pontos de x ≥ 0 e a função 2 é válida para os pontos de x < 0. A Figura 2.30 mostra o esboço do gráfico.

x	-2	-1	0	1	2
y = |2x|	4	2	0	2	4

Figura 2.30: Esboço do gráfico da função f(x) = |2x|.



b)Pela definição de módulo, tem-se que:

$$f(x)=|x=2|\begin{cases}+(x+2), se(x+2) \geq 0 \Rightarrow x \geq -2\\ -(x+2), se(x+2) < 0 \Rightarrow x < -2\end{cases}$$

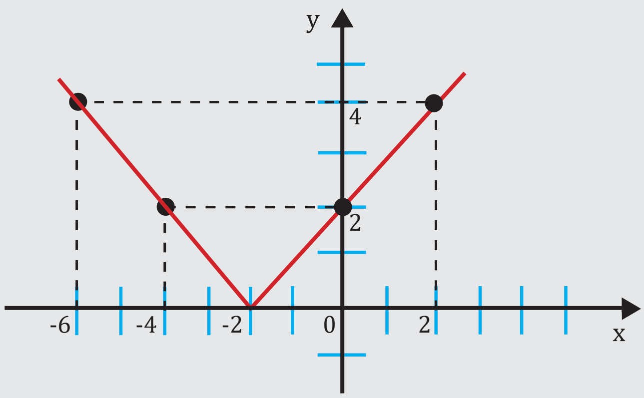
Portanto,

$$f(x)=|x+2|\begin{cases}f_1(x)=x+2, se\, x \geq -2\\ f_2(x)=-x-2, se\, x < -2\end{cases}$$

Fazendo o gráfico das funções $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$, em seus domínios, a partir da tabela abaixo, tem-se a reunião das duas semiretas que se encontram no ponto (-2, 0). Observe que a função 1 é válida para os pontos de $x \geq -2$ e a função 2 é válida para os pontos de $x < -2$. A Figura 2.31 mostra o esboço do gráfico.

x	-6	-4	-2	0	2
$y = \|x + 2\|$	4	2	0	2	4

Figura 2.31: Esboço do gráfico da função $f(x) = |x + 2|$.

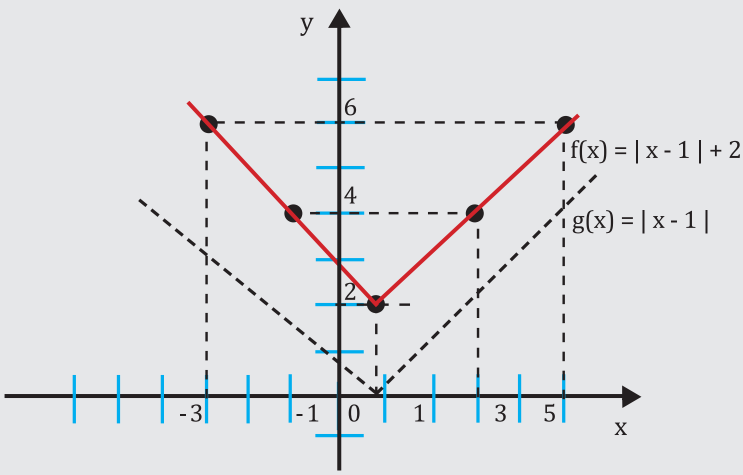


c) Nesse caso em que $f(x) = |x - 1| + 2$, deve-se inicialmente construir o gráfico da função $g(x) = |x - 1|$, pois sempre se deve partir do termo da função que está dentro do módulo. Para se obter o gráfico da função $f(x) = g(x) + 2$, desloca-se cada ponto da função g duas unidades "para cima".

A tabela abaixo mostra alguns pares coordenados para esse gráfico. A Figura 2.32 mostra o esboço do gráfico.

x	-3	-1	-1	3	5
$y = \|x - 1\| + 2$	6	4	2	4	6

Figura 2.32: Esboço do gráfico da função $f(x) = |x - 1| + 2$



d) Inicialmente, observa-se que x não pode assumir o valor 0 (zero), pois o denominador de uma fração não pode ser nulo. Conclui-se que o domínio dessa função é $D(f) = \mathbb{R}^*_+$, ou seja, os valores de x podem assumir qualquer valor real, menos o 0 (zero). Logo, da definição de módulo, tem-se que

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1, se\ x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1, se\ x < 0 \end{cases}$$

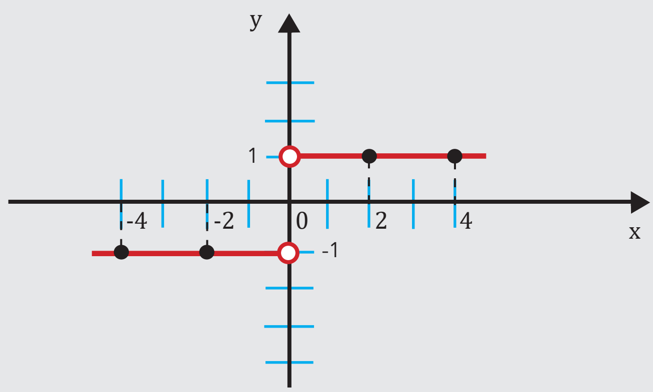
Portanto,

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} f_1(x) = 1, se\ x > 0 \\ f_2(x) = -1, se\ x < 0 \end{cases}$$

Fazendo o gráfico das funções $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$, em seus domínios, a partir da tabela abaixo, tem-se que cada uma dessas funções representa uma semireta paralela ao eixo x. Observe que existe um salto entre estas duas semi-retas no ponto x = 0, que não pertence à função. A Figura 2.33 mostra o esboço do gráfico.

x	-4	-2	2	4
$y = \frac{\lvert x \rvert}{x}$	-1	-1	1	1

Figura 2.33: Esboço do gráfico da função $f(x) = \frac{|x|}{x}$.



Equações modulares

Para resolver equações modulares, utiliza-se a propriedade 8 vista acima, ou seja, se

$$a > 0\ (a \in \mathbb{R}),\ |x| = a \Leftrightarrow x = \pm a.$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Resolva as seguintes equações modulares.

a) $|3x - 2| = 4$

b) $|5x - 6| = 0$

c) $|4x - 2| = |3x + 4|$

d) $|2x + 1| = 3x + 2$

e) $|x^2 + x - 5| = |4x - 1|$

Resposta:

a) Pela propriedade 8, tem-se que:

$$|3x-2| = 4 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 4 \Rightarrow se\ x = 2\ ou \\ 3x - 2 = -4 \Rightarrow se\ x = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Portanto,

$$S = \left\{-\frac{2}{3}; 2\right\}$$

b) Pela propriedade 8, tem-se que:

$$|5x-6| = 0 \Rightarrow 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$$

Portanto,

$$S = \left\{\frac{6}{5}\right\}$$

c) Pela propriedade 8, tem-se que:

$$|4x-2| = |3x+4| \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2 = 3x + 4 \Rightarrow x = 6\ ou \\ 4x - 2 = -3x - 4 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

Portanto,

$$S = \left\{-\frac{2}{7}; 6\right\}$$

d) Para este caso, inicialmente, precisa-se ter $3x + 2 \geq 0$, pois, pela propriedade 8, o valor de $a \geq 0$, logo $x \geq -\frac{2}{3}$. Usando a propriedade 8, tem-se que:

$$|x+1| = 3x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 3x + 2 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}\ ou \\ x + 1 = -3x - 2 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Observa-se que $x = -\frac{3}{4} = -0{,}75$ não satisfaz a essa equação modular, pois se deve ter $x \geq -\frac{2}{3}$ = -0,666..., valor este estabelecido pela condição inicial para $a \geq 0$

Portanto,

$$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Vale ressaltar que sempre que não tivermos um módulo do lado direito da equação, deve-se estabelecer essa condição. Caso haja o módulo nos dois termos (direito e esquerdo), essa verificação não é necessária, pois o módulo já garante que o valor será positivo, como no caso do exercício resolvido acima.

e) Pela propriedade 8, tem-se que:

$$\left|x^2+x-5\right|=\left|4x-1\right| \Rightarrow \begin{cases} x^2+x-5=4x-1 \Rightarrow x=4 \ ou \ x=-1 \\ x^2+x-5=-4x+1 \Rightarrow x=1 \ ou \ x=-6 \end{cases}$$

Portanto,

S={-6; -1; 1; 4}

Se cada uma das soluções acima for substituída na equação modular, verifica-se que todas convêm à equação.

Inequações modulares

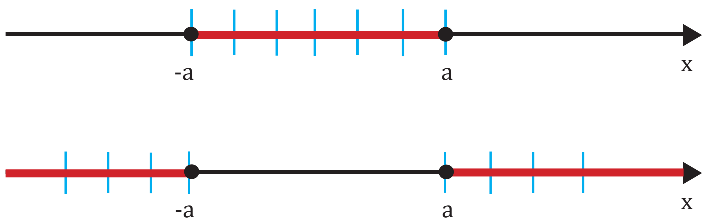
O estudo das inequações modulares decorre das propriedades 9 e 10 vistas anteriormente e reproduzidas logo abaixo

9) Para a > 0 (a ∈ ℝ), |x| ≤ a ⇔ -a ≤ x ≤a;

10) Para a > 0 (a ∈ ℝ), |x| ≥ a ⇔ x ≤ -a ou x ≥ a

Representando as mesmas graficamente (Figura 2.34), tem-se que

Figura 2.34: Representação gráfica das propriedades 9 e 10 respectivamente.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Resolva as seguintes inequações modulares.

a) |3x + 2| < 4

b) |3x + 2| > 4

c) 2x – 7 + |x + 1| ≥ 0

Resposta:

a) Pela propriedade 9, tem-se que:

$$|3x+2|<4$$
$$-4<3x+2<4$$
$$-4-2<3x<4-2$$
$$-6<3x<2$$
$$-2<x<\frac{2}{3}$$

$$S=\left\{x\in\mathbb{R} \,|\, -2<x<\frac{2}{3}\right\}$$

b) Pela propriedade 10, tem-se que:

|3x + 2| > 4

3x + 2 < -4 ou 3x + 2 > 4

3x < -6 ou 3x > 2

x < -2 ou x > 2/3

$$S=\left\{x\in\mathbb{R} \,|\, -2<x<\frac{2}{3}\right\}$$

c) Primeiramente, analisando a parte modular da equação, tem-se que

$$|x=1| = \begin{cases} x+1, se(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ -x-1, se(x+1) < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$$

Deve-se considerar, portanto, dois casos:

1º caso: se $x \geq -1$, tem-se:
$2x - 7 + |x + 1| \geq 0 \Rightarrow 2x - 7 + x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

A solução $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

2º caso: se $x < -1$, tem-se:
$2x - 7 + |x + 1| \geq 0 \Rightarrow 2x - 7 - x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 8$

A solução $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cap \{x \in \mathbb{R}\ x \geq 8\} = \emptyset$

A solução da inequação é $S = S_1 \cup S_2$, logo $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

Assim como foi feito com as funções afins, pode-se resolver estas inequações representando os intervalos nas retas reais.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = |2x - 1|$

b) $f(x) = |2 - 3x|$

c) $f(x) = |3x - 4| + 1$

d) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{1-x}$

2. Resolva as seguintes equações modulares.

a) $|2x - 3| = -1$

b) $|x^2 - 4x + 5| = 2$

c) $|3x + 2| = |x - 1|$

d) $|4 - 3x| = 3x - 4$

e) $|2x^2 + 15x - 3| = x^2 + 2x - 3$

3. Resolva as seguintes inequações modulares.

a) $|3x - 5| > 0$

b) $|x^2 - 5x| \quad 6$

c) $|3x - 4| + 2x + 1 < 0$

Função exponencial

Definição de função exponencial

Seja um número real a, tal que $0 < a \neq 1$, uma função é dita exponencial de base a quando tal aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o número a^x, ou seja

$$f(x) = a^x$$

Como exemplos de funções exponenciais, tem-se que:

a) $f(x) = 3^x$ b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $p(x) = 10^x$ d) $r(x) = (\sqrt{3})^x$

Propriedades operatórias

Sejam **a** e **b números reais** e **m** e **n números inteiros** positivos, pode-se definir as seguintes propriedades operatórias envolvendo potências que são extremamente importantes para as funções exponenciais.

1. $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (produto de n fatores)
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
3. $a^0 = 1$, para $a \neq 0$
4. 0^0 não possui definição e é considerada uma forma indeterminada
5. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
6. $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$
7. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, para $b \neq 0$
9. $\sqrt[n]{a} = b$, quando $b^n = a$
10. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
11. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ para $b \neq 0$
12. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ para todo inteiro positivo p
13. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Domínio e imagem da função exponencial

Pela definição da função exponencial, a base a deve ser positiva e diferente de 1. O expoente x pode assumir qualquer valor real. Logo, se $0 < a \neq 1$, $D = \mathbb{R}$. Mas admitindo-se que a base a esteja em função de x, como no exemplo abaixo.

Exemplo: Qual o domínio da função $f(x) = (x + 2)^{3x}$?

A base dessa função exponencial é positiva e diferente de 1. Logo,

$x + 2 > 0$ e $x + 2 \neq 1$. Daí, tem-se que

$x > -2$ e $x \neq -1$

Levando-se em conta essas duas restrições, tem-se que o domínio da função é o seguinte conjunto:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2 \text{ e } x \neq -1\}$$

Com relação à imagem, se $f(x) = a^x$, ter-se-á uma imagem sempre positiva, pois a base é positiva e diferente de 1. Além do mais, a imagem não assume o valor 0 (zero), então

$$Im = \mathbb{R}_+^*$$

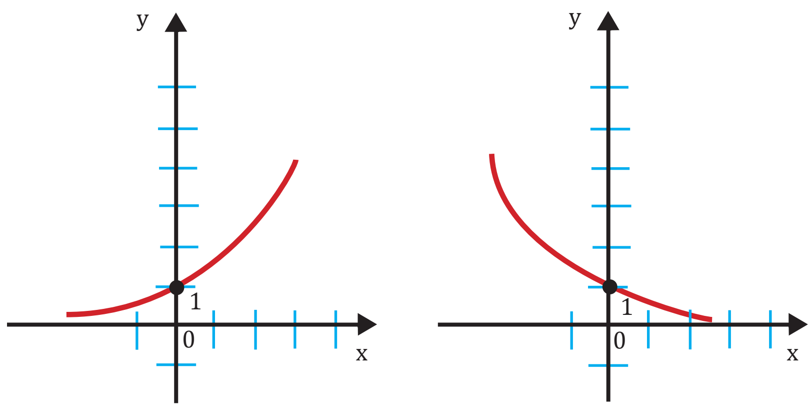
Gráfico da função exponencial

Com relação ao gráfico de uma função exponencial, pode-se dizer que:

1. A curva está toda acima do eixo x, pois $y = a^x > 0$, para qualquer x real.
2. O gráfico corta o eixo y no ponto de ordenada 1, pois quando $x = 0$, qualquer valor de a elevado a 0 (zero) é igual a 1.
3. Se $a > 1$, a função é crescente e se $0 < a < 1$, a função é decrescente, lembrando que a é sempre positivo.

O esboço de uma função exponencial é mostrado na Figura 2.35, onde na Figura 2.35a, tem-se a forma de uma função exponencial crescente e na Figura 2.35b a de uma decrescente.

Figura 2.35: Esboço de funções exponenciais: (a) crescente e (b) decrescente.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Esboce o gráfico das seguintes funções:

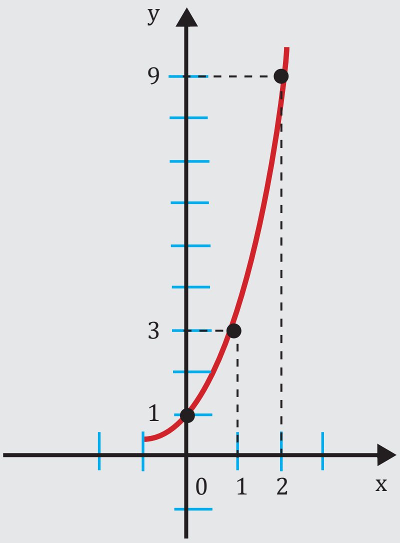
a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $f(x) = 3^{x-1}$

Resposta:

a) Construindo-se uma tabela com os valores de x e y da função, tem-se que

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

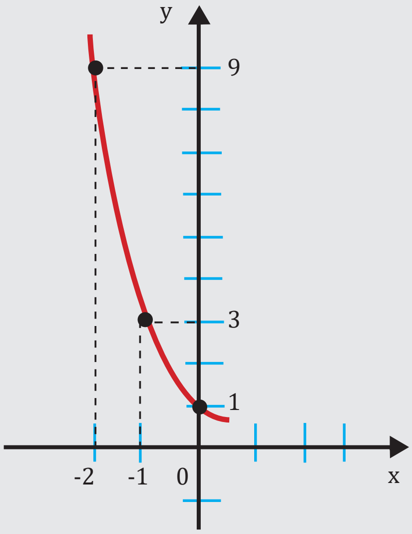
Figura 2.36: Esboço do gráfico da função $f(x) = 3^x$



b) Construindo-se uma tabela com os valores de x e y da função, tem-se que

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

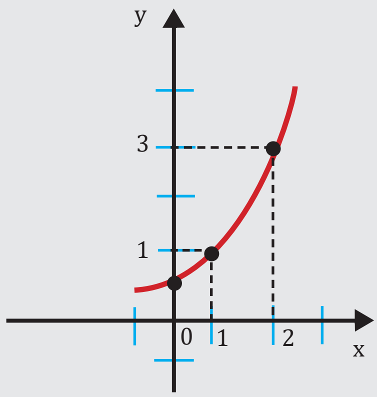
Figura 2.37: Esboço do gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



c) Construindo-se uma tabela com os valores de x e y da função, tem-se que

x	-2	-1	0	1	2
x - 1	-3	-2	-1	0	1
$y = 3^{x-1}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3

Figura 2.38: Esboço do gráfico da função $f(x) = 3^{x-1}$.



Equação exponencial

Uma equação exponencial é uma equação cuja incógnita está no expoente.

Exemplos:

$$3^x = 27$$

$$(\sqrt{2})^x = \sqrt[3]{8}$$

$$9^x + 3^x = 3$$

Um dos métodos para a resolução dessas equações é a redução a uma base comum, ou seja, se ambos os membros da equação apresentarem a mesma base, igualam-se os expoentes da mesma.

$$a^b = a^c \Leftrightarrow b = c \ (0 < a \neq 1)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Resolva as seguintes equações exponenciais.

a) $3^{x+4} = 27$ b) $3x^{2+3x+3} = 27^{x+4}$ c) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$

Resposta:
Reduzindo-se todos os termos da equação à mesma base, tem-se que:

$$3^{x+4} = 3^3$$
$$x + 4 = 3$$
$$x = 1$$
$$S=\{1\}$$

b) Reduzindo-se todos os termos da equação à mesma base, tem-se que:

$$3^{x^2+3x+3} = \left(3^3\right)^{x+4}$$
$$3^{x^2+3x+3} = 3^{3x+12}$$
$$x^2 + 3x + 3 = 3x + 12$$
$$x^2 - 9 = 0$$
$$x = \pm 3$$
$$S = \{-3\,;\,3\}$$

c) Reduzindo-se todos os termos da equação à mesma base, tem-se que:

$$\left(2^2\right)^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$$
$$2^{2(x+1)} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$$
$$2^{2x} \cdot 2^2 - 9 \cdot 2^x = 0$$
$$4 \cdot \left(2^x\right)^2 - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$$

Fazendo $y = 2^x$, tem-se que:

$$4y^2 - 9y + 2 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as seguintes raízes: y' = -2 e y'' = 1.

Logo, S = {-2; 1}

Inequação exponencial

Inequações exponenciais são as inequações com incógnita no expoente.

$$3^x > 27$$
$$(\sqrt{2})^x > \sqrt[3]{8}$$
$$9^x + 3^x > 3$$

Assim como em equações exponenciais, existem dois métodos fundamentais para resolução das inequações exponenciais. Um dos métodos para a resolução dessas inequações é a redução a uma base comum. Lembrando que a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente, se $a > 1$, ou decrescente, se $0 < a < 1$, logo:

Se b e c são números reais, então:

Para $a > 1$ tem-se $a^b > a^c \Leftrightarrow b > c$

Para $0 < a < 1$ tem-se $a^b > a^c \Leftrightarrow b < c$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Resolva as seguintes inequações exponenciais.

a) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^x < \sqrt[4]{8}$ b) $(x - 3)\, 2^{-x} < 0$ c) $\left(\dfrac{1}{2^x}\right)^{3x+1} \cdot 4^{1+2x-x^2} \geq \left(\dfrac{1}{8}\right)^{x-1}$

Resposta:

a) Reduzindo-se todos os termos da equação à mesma base e utilizando a propriedade 13, tem-se que:

$$2^{\frac{x}{3}} < 2^{\frac{3}{4}}$$

Como a base é maior que 1, tem-se: $\dfrac{x}{3} < \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x < \dfrac{9}{4}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{9}{4}\right\}$$

b) Nota-se que nesse produto o fator 2^{-x} é sempre positivo, pois 2 elevado a qualquer número real positivo ou negativo será sempre um número positivo. Então o sinal do produto será o mesmo sinal do fator (x – 3).

$$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$$

Logo, o produto $(x - 3)\,2^{-x} < 0$ será negativo para todos os valores de $x < 3$ e positivo para todos os valores de $x > 3$.

c) Desenvolvendo a expressão e reduzindo todos os termos da equação à mesma base 1/2, tem-se que:

$$\left(\frac{1}{2^x}\right)^{3x+1} \cdot 4^{1+2x-x^2} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{3x+1} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{1+2x-x^2} \geq \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{x-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x^2+x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2-4x+2x^2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-3}$$

Usando-se a propriedade 5, tem-se que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2-3x-2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-3}$$

Como a base é maior que 0 e menor que 1 $\left(0 < \frac{1}{2} < 1\right)$, inverte-se o sinal de maior ou igual para menor ou igual, logo:

$$5x^2 - 3x - 2 \leq 3x - 2$$
$$5x^2 - 6x + 1 \leq 0$$

Resolvendo essa inequação do 2º grau, vem:

$$\frac{1}{5} \leq x \leq 1 \;\; e \;\; S = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{1}{5} \leq x \leq 1\right\}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = 4^x$ b) $f(x) = 4^{-x}$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$ d) $f(x) = 2^x - 3$

2. Resolva as seguintes equações exponenciais.

a) $\left(\sqrt[5]{4}\right)^x = \frac{1}{\sqrt{8}}$ b) $2^{3x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^{3-x}$ c) $10^{2x-1} - 11 \cdot 10^{x-1} + 1 = 0$

3. Resolva as seguintes inequações exponenciais

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{81}$ b) $\left(\sqrt[5]{25}\right)^x < \frac{1}{\sqrt[4]{125}}$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{8}{27}\right)^{x-3}$

Função logarítmica

Conceito de logaritmo

Sejam dois números reais *a* e *b*, tais que $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, chama-se logaritmo de *b* na base *a* a solução x da equação exponencial $a^x = b$. Logo,

$\log_a b = x$ se, e somente se, $a^x = b$

Na expressão $\log_a b = x$, *a* é a base do logaritmo, *b* é o logaritmando e x é o logaritmo de *b* na base *a*.

Exemplos:

a) $\log_2 16 = 4$ pois $2^4 = 16$ **b)** $\log_3 \frac{1}{27} = -3$, pois $3^{-3} = \frac{1}{27}$ **c)** $\log_7 7 = 1$ pois $7^1 = 7$

d) $\log_5 1 = 0$ pois $5^0 = 1$ **e)** $\log_4 8 = \frac{3}{2}$, pois $4^{\frac{3}{2}} = \left(2^2\right)^{\frac{3}{2}} = 8$ **f)** $\log_{0,2} 125 = -3$ pois $0,2^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \left(5\right)^3 = 125$

Consequências da definição de logaritmo

Da definição de logaritmo, têm-se algumas propriedades que merecem ser destacadas, onde $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$.

1. O logaritmo de 1 (um) em qualquer base a é igual a 0 (zero).

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1.$$

2. O logaritmo da base a em qualquer base a é igual a 1.

$$\log_a a = 1, \textit{ pois } a^1 = a$$

3. A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b.

$$a^{\log_a b} = b$$

4. Dois logaritmos em uma mesma base são iguais, se e somente se, os logaritmandos são iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Propriedades dos logaritmos

Sejam **a**, **b**, **c** e **r** números reais onde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, podem-se definir as seguintes propriedades operatórias que tornam vantajoso o uso de logaritmos nos cálculos.

1. Logaritmo do produto: $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$
2. Logaritmo do quociente: $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
3. Logaritmo de uma potência: $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$

Demonstração:

Fazendo $x = \log_a b$; $y = \log_a c$; $z = \log_a (b \cdot c)$

Pela definição de logaritmo, tem-se que: $a^x = b$; $a^y = c$; $a^z = b \cdot c$.

Logo, conclui-se que $a^z = b \,.\, c = a^x \,.\, a^y = a^{x+y}$.

Então z = b + c. Ou seja, $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Mudança de base

Até agora, todas as operações com logaritmos envolvem propriedades onde estes têm a mesma base. Em algumas aplicações é interessante transformar um logaritmo de uma base para outra.

Se a, b e c são números reais positivos e a e c diferentes de 1, então:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Demonstração:

Fazendo $x = \log_a b$; $y = \log_c b$; $z = \log_c a$, nota-se que $z \neq 0$, pois $a \neq 1$.

Provando que $x = \dfrac{y}{z}$

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$$

$$\log_c b = y \Rightarrow c^y = b$$

$$\log_c a = z \Rightarrow c^z = a$$

Logo: $\left(c^z\right)^x = a^x = b = c^y \Rightarrow c^{z*x} = c^y \Rightarrow zx = y \Rightarrow x = \dfrac{y}{z}$

Exemplos:

$\log_2 5$ convertido para a base 3:

$$\log_2 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 2}$$

$\log_{100} 7$ convertido para a base 10:

$$\log_{100} 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 100} = \frac{\log_{10} 7}{2} = \frac{1}{2}\log_{100} 7$$

Se a, b e c são números reais positivos e *a* e *c* diferentes de 1, a propriedade de mudança de base pode também ser interpretada das seguintes formas:

$$\log_a b = \log_c b \,.\, \log_a c$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b$$

As demonstrações para essas consequências das mudanças de base ficam como exercícios propostos.

Definição de função logarítmica

Seja um número real a, tal que $0 < a \neq 1$, uma função é dita logarítmica de base a quando tal aplicação f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ associa a cada o número $\log_a x$, ou seja

$$f(x) = log_a\, x$$

Como exemplos de funções logarítmicas, tem-se que:

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ c) $p(x) = \log x$ d) $r(x) = \ln x$

Para o exemplo c, quando não se diz a base, significa que é a base 10. No caso do exemplo, d ln significa que é o logaritmo na base e que é chamado de logaritmo natural ou neperiano onde, $e \approx 2{,}718$, muito utilizado nas ciências aplicadas, como Economia e Física.

Propriedades da função logarítmica

As propriedades da função logarítmica são duas e são as seguintes:

Se $a > 1$, então $f(x) = log_a\, x$ é uma função crescente

Para provar isso, observa-se que $x_2 > x_1 \Rightarrow a^{log_a x_2} > a^{log_a x_1}$.

logo $\dfrac{a^{\log_a^{x_2}}}{a^{\log_a^{x_1}}} > 1 \Rightarrow a^{\log_a^{x_2}} - a^{\log_a^{x_1}} > 1.$

Conclui-se que $\log_a^{x_2} - \log_a^{x_1} > 0 \Rightarrow \log_a^{x_2} > \log_a^{x_1}$

Se $0 < a < 1$, então $f(x) = log_a\, x$ é uma função decrescente.

Para provar isso, observa-se que $x_2 > x_1 \Rightarrow a^{log_a x_2} > a^{log_a x_1}$.

logo $\dfrac{a^{\log_a^{x_2}}}{a^{\log_a^{x_1}}} > 1 \Rightarrow a^{\log_a^{x_2}} - a^{\log_a^{x_1}} > 1.$

Como $0 < a < 1$, conclui-se que $\log_a^{x_2} - \log_a^{x_1} < 0 \Rightarrow \log_a^{x_2} < \log_a^{x_1}$

Exemplos:

$4 > 2 \Rightarrow \log_2 4 > \log_2 2$

$8 > 2 \Rightarrow log_{\frac{1}{2}}^{8} < log_{\frac{1}{2}}^{2}$

Domínio e imagem da função logarítmica

O domínio de uma função logarítmica do tipo $f(x) = log_a\, x$ são os reais positivos, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, pois x não pode assumir valor negativo e nem tampouco o valor zero, pois pela definição de logaritmo, se

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

O logaritmando b é sempre positivo.

Se $0 < a \neq 1$, então a função f de $\mathbb{R}_+^*$ em f de R definida por $f(x) = log_a\, x$ admite a função inversa de g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$. Logo, *f* é bijetora e, portanto, a imagem de *f* é:

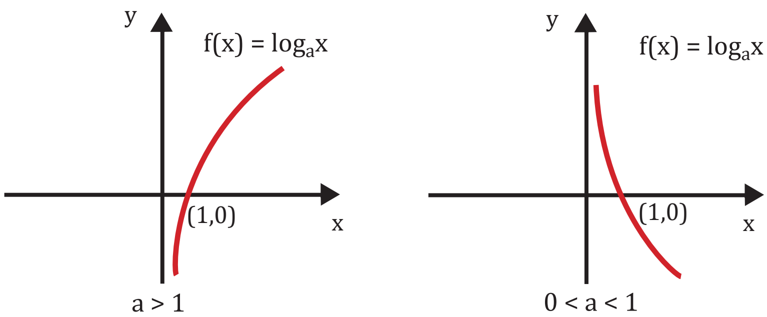
$$Im = \mathbb{R}$$

Gráfico da função logarítmica

Com relação ao gráfico da função logarítmica, do tipo $f(x) = log_a x$, pode-se dizer que:

1. Está todo à direita do eixo y, pois x > 0;
2. Corta o eixo x no ponto de abscissa 1, pois $log_a 1 = 0$, ou seja, para x = 1; y = 0;
3. Se a > 1 a função é crescente e se 0 < a < 1 a função é decrescente;
4. Toma um dos aspectos da Figura 2.39, sendo a função crescente no primeiro caso e decrescente no segundo.

Figura 2.39: Esboço do gráfico de funções do tipo $f(x) = \log_a x$.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Sabendo que $log_a b = 3$, $log_a c = 2$, calcule:

a) $\log_a\left(b^2 \cdot c^3\right)$ b) $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)^{10}$ c) $\log_a a^2 b^3 c^4$

Resposta:

a) Aplicando-se a propriedade 1 dos logaritmos, tem-se:

$$\log_a\left(b^2 \cdot c^3\right) = \log_a\left(b^2\right) + \log_a\left(c^3\right)$$

Em seguida, aplica-se a propriedade 3, logo, tem-se:

$$\log_a\left(b^2\right) + \log_a\left(c^3\right) = 2\log_a b + 3\log_a c$$

Como $\log_a b = 3$ e $\log_a c = 2$, substituindo na expressão acima, vem:

$$2\log_a b + 3\log_a c = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$$

b) Aplicando-se a propriedade 3 dos logaritmos, tem-se:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)^{10} = 10\log_a\left(\frac{b}{c}\right)$$

Em seguida, aplica-se a propriedade 2, logo, tem-se:

$$10\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = 10\left(\log_a b - \log_a c\right)$$

Como $\log_a b = 3$ e $\log_a c = 2$ substituindo na expressão acima, vem:

$$10\left(\log_a b - \log_a c\right) = 10(3-2) = 10$$

c) Aplicando-se a propriedade 1 dos logaritmos, tem-se:

$$\log_a a^2b^3c^4 = \log_a a^2 + \log_a b^3 + \log_a c^4$$

Em seguida, aplica-se a propriedade 3, logo, tem-se:

$$\log_a a^2 + \log_a b^3 + \log_a c^4 = 2\log_a a + 3\log_a b + 4\log_a c$$

Como $\log_a a = 1$ (propriedade 2) $\log_a b = 3$ *e* $\log_a c = 2$ (dados do enunciado da questão), substituindo na expressão acima, vem:

$$2\log_a a + 3\log_a b + 4\log_a c = 2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 4\cdot 2 = 2 + 9 + 8 = 19$$

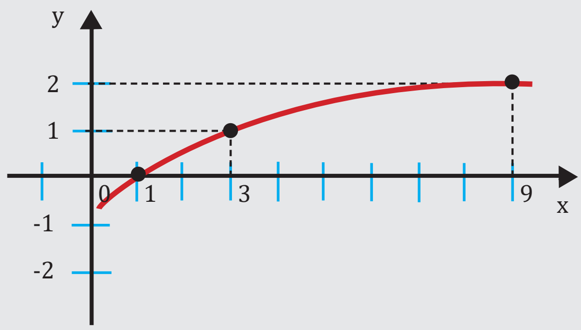
2. Construir o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Resposta:
a) Para se construir esse gráfico, é interessante primeiramente se fazer uma tabela dando valores inicialmente a y e depois calculando x. A Figura 2.40 mostra o esboço desse gráfico.

$y = \log_3 x$	x
-2	1/9
-1	1/3
0	0
1	3
2	9

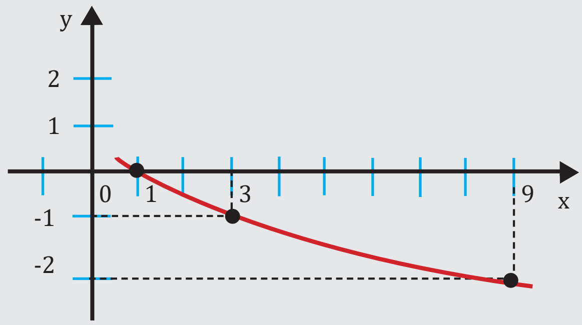
Figura 2.40: Esboço do gráfico da função crescente f(x) = $\log_3$x.



b) Adotando a mesma estratégia do item anterior, tem-se a tabela abaixo e o gráfico na Figura 2.41.

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	x
-2	9
-1	3
0	0
1	1/3
2	1/9

Figura 2.41: Esboço do gráfico da função decrescente f(x) = $\log_{\frac{1}{3}} x$.



3. Determine o domínio da seguinte função:

a) $f(x) = \log_{(x+2)}(-x^2 + x + 12)$

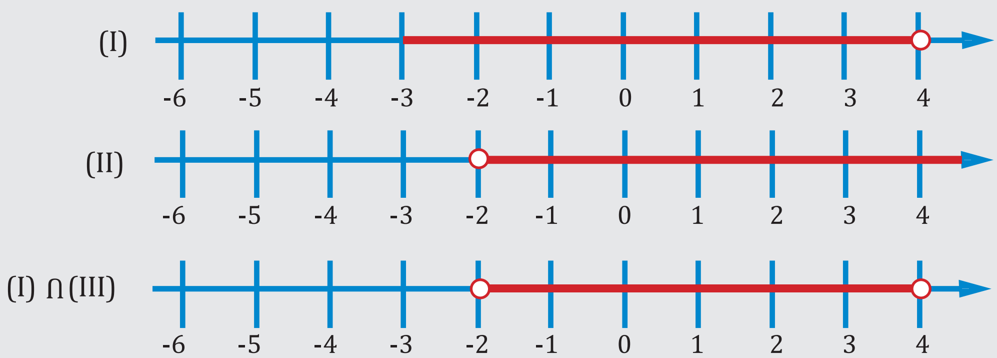
Resposta:
Pela definição de logaritmo, o logaritmando deve ser sempre maior do que zero e a base deve ser maior do que zero e também diferente de 1. Logo, tem-se:

$$\log_{(x+2)} -x^2 + x + 12 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + x + 12 > 0 \ \text{(I)} \\ 0 < x + 2 \neq 1 \ \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo separadamente as inequações (I) e (II), tem-se:

(I) $-x^2 + x + 12 > 0 \Rightarrow -3 < x < 4$
(II) $0 < x + 2 \neq 1 \Rightarrow -2 < x \neq -1$

Fazendo a interseção dos conjuntos:



$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4 \ e \ x \neq -1\}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Construa o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x)=\log_7 x$ b) $f(x)=\log_{\frac{1}{7}} x$ c) $f(x)=\log_3 x^2$ d) $f(x)=\log_3(3x-1)$

2. Sabendo que $\log_a b=2$ e $\log_a c=3$, calcule:

a) $\log_a\left(\sqrt[3]{b^2\cdot c^4}\right)$ b) $\log_a\left(\dfrac{\sqrt{b}}{c^2}\right)^8$ c) $\log_{\frac{1}{b}} a^2$

3. Determine o domínio das funções:

a) $f(x)=\log_{(2-x)}(x+3)$ b) $f(x)=\log_{(x)}(x^2-4x+3)$ c) $f(x)=\log_{(3x-2)}(-x^2+5x-4)$

Função trigonométrica

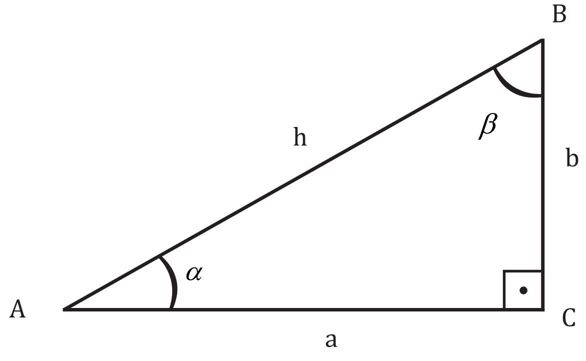
UN 02

O assunto sobre funções trigonométricas é muito extenso. Aqui neste curso, serão abordadas apenas de maneira resumida as funções trigonométricas de um ângulo agudo, as relações fundamentais, que serão importantes em disciplinas posteriores de cálculo, e para as funções seno, cosseno e tangente será dada apenas uma pincelada geral no assunto. Sugere-se ao aluno que deseja aprofundar seus conhecimentos em trigonometria procurar livros clássicos do assunto, que é muito relevante em matemática.

Definição de seno, cosseno e tangente através de triângulos retângulos

O triângulo retângulo é aquele em que um dos seus ângulos internos mede 90° (ângulo reto). Logo, a soma dos outros dois ângulos será também 90°, pois a soma dos três ângulos internos de qualquer que seja o triângulo é 180°. O triângulo retângulo é representado na Figura 2.42, onde o segmento AB é a hipotenusa (oposta ao ângulo reto) e os segmentos BC e AC são os seus catetos. Pelo teorema de Pitágoras, tem-se que: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ou $h^2 = a^2 + b^2$. α e β são ângulos agudos.

Figura 2.42: Esboço de um triângulo retângulo.



As relações que definem seno, cosseno e tangente do ângulo agudo α são escritas da seguinte forma:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa} = \frac{b}{h}$$

$$\cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa} = \frac{a}{h}$$

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha} = \frac{b}{a}$$

Analogamente, para o ângulo β, tem-se as seguintes relações:

$$sen\ \beta = \frac{a}{h}, \cos\ \beta = \frac{b}{h} \text{ e } tg\ \beta = \frac{a}{b}$$

Uma relação trigonométrica muito importante é a relação fundamental, dada por

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Substituindo os valores de seno e cosseno de α na relação fundamental de acordo com o triângulo retângulo da Figura 2.42 e usando o teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{b}{h}\right)^2 + \left(\frac{a}{h}\right)^2 = \frac{b^2 + a^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1$$

Além do mais, a tangente pode também ser escrita como

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \text{ ou } tg\alpha = \frac{\frac{b}{h}}{\frac{a}{h}} = \frac{b}{a}$$

Seno, cosseno e tangente também são chamados razões trigonométricas por serem razões entre números que expressam as medidas dos lados dos triângulos. São grandezas adimensionais, pois são razões entre dois lados do mesmo triângulo. Porém, as medidas dos lados devem estar na mesma unidade de medida.

As seguintes relações são muito importantes na trigonometria e nas posteriores disciplinas de Cálculo:

$$sen(a+b) = sena \cdot \cos b + senb \cdot \cos a$$

$$sen(a-b) = sena \cdot \cos b - senb \cdot \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - senb \cdot sena$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + senb \cdot sena$$

$$sen(2x) = 2senx \cdot \cos x$$

$$sen^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Definição de cossecante, secante e cotangente

As funções cossecante, secante e cotangente são conhecidas como as funções recíprocas das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente respectivamente. As mesmas são definidas por:

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}, \text{ se sen}\,\alpha \neq 0$$

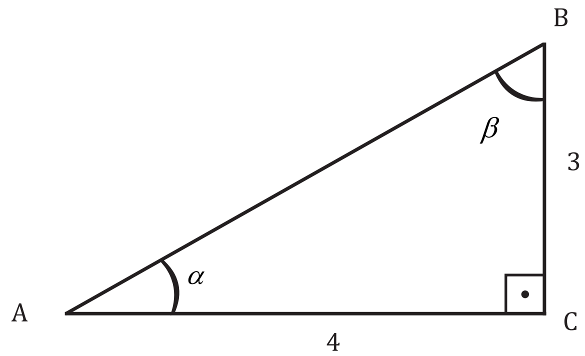
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \text{ se } \cos\alpha \neq 0$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}, \text{ se tg}\,\alpha \neq 0$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule o valor das relações trigonométricas, a partir do valor dado, supondo que $0 < \alpha < 2\pi$. Sabendo que $tg\alpha = \frac{3}{4}$, calcule sen α, cos α, cotg α, sec α e cossec α.

Para auxiliar no exercício, em cada caso, considere os lados do triângulo retângulo.



Em primeiro lugar, calcula-se a hipotenusa do triângulo retângulo através do Teorema de Pitágoras:

$h^2 = 3^2 + 4^2$. Logo $h = 5$.

Com isso, pode-se responder a todos os itens propostos:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa} = \frac{4}{5}$$

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

2. Calcule sen105°.

Como será visto na tabela 2.1 a seguir, os ângulos 30°, 45° e 60° são chamados ângulos notáveis, onde seus valores de seno, cosseno e tangente são mais utilizados e conhecidos.

Logo, pode-se reescrever o enunciado como: sen(60° + 45°)

Resolvendo:

$$sen(60°+45°) = sen60° \cdot \cos 45° + sen45° \cdot \cos 60°$$

Como será visto adiante, basta substituir os valores desses senos e cossenos dos ângulos notáveis e poderá ser obtido o valor de sen105°.

3. Calcule cos15°.

Partindo do mesmo princípio do exemplo anterior, pode-se reescrever o enunciado como: cos(60° - 45°)

Resolvendo:

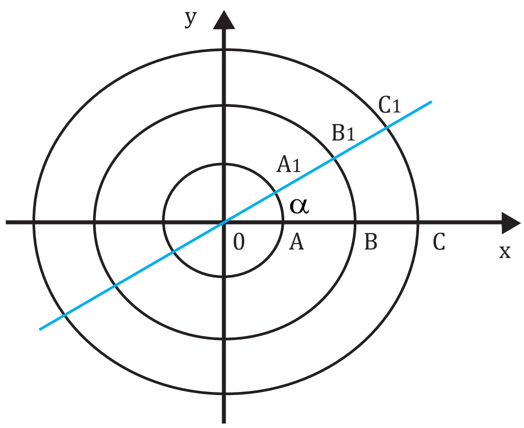
$$\cos(60°-45°) = \cos 60° \cdot \cos 45° + sen45° \cdot sen60°$$

Da mesma forma, basta substituir os valores desses senos e cossenos dos ângulos notáveis e poderá ser obtido o valor de cos15°.

Ângulos em graus e radianos

Em geral, na trigonometria, utilizam-se as medidas de ângulos em radianos. Definimos a medida do angulo α, denominada de radianos (rad), como sendo a constante real k, expressa pelas razões dos arcos pelos raios dos círculos correspondentes. Em particular 1 rad (um radiano) é a medida para qual o raio OA é igual ao arco AA1 (Figura 2.43). Define-se o número real π, como sendo a razão do comprimento total da circunferência de raio r pelo seu diâmetro (d = 2r). A partir da sua definição, tem-se que 2π rad equivalem a um ângulo de 360^0.

Figura 2.43: Ângulo α no sistema de coordenadas cartesianas oxy e vários círculos com centros no vértice desse ângulo.



Logo, pode-se dizer que 2π rad = 360°. A partir dessa relação, pode-se determinar para quaisquer ângulos em graus a sua medida em radianos através de uma simples regra de três.

Exemplos:

1. Para transformar 60° em radianos, deve-se fazer a seguinte regra de três:

2π rad ----- 360°

x ----- 60°

Ou seja, 2π rad corresponde a 360° e 60° corresponderá a x rad. Logo, fazendo a multiplicação em cruz na diagonal, tem-se que:

2π rad . 60° = 360° . x

$$x = \frac{2\pi.60}{360}rad = \frac{\pi}{3}rad$$

2. Para transformar 30° em radianos, deve-se fazer a seguinte regra de três:

2π rad ----- 360°

y ----- 30°

Pode-se simplificar a primeira linha da regra de três, dividindo-a toda por dois, e reescrevê-la da seguinte forma

π rad ----- 180°

y ----- 30°

Ou seja, π rad corresponde a 180° e 30° corresponderá a y rad. Logo, fazendo a multiplicação em cruz na diagonal, tem-se que:

π rad . 30° = 180° . x

$$y = \frac{\pi.30}{180}rad = \frac{\pi}{6}rad$$

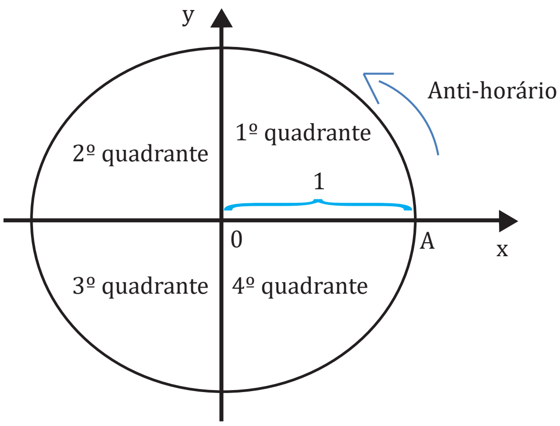
Ciclo trigonométrico

O ciclo trigonométrico (Figura 2.44) é um círculo orientado cujo sentido positivo é o anti-horário que tem como origem de todos os arcos um ponto A. Esse círculo tem raio unitário (igual a 1), está dividido em quatro quadrantes e pode-se representar no mesmo as funções trigonométricas.

As funções seno e cosseno são as mais facilmente representadas no ciclo trigonométrico. Tais funções têm como domínio os números reais e como imagem o intervalo de -1 a 1, ou seja, Im = [-1; 1].

As medidas dos arcos estão associadas ao sinal positivo se estes estiverem no sentido anti-horário e negativo se no sentido horário.

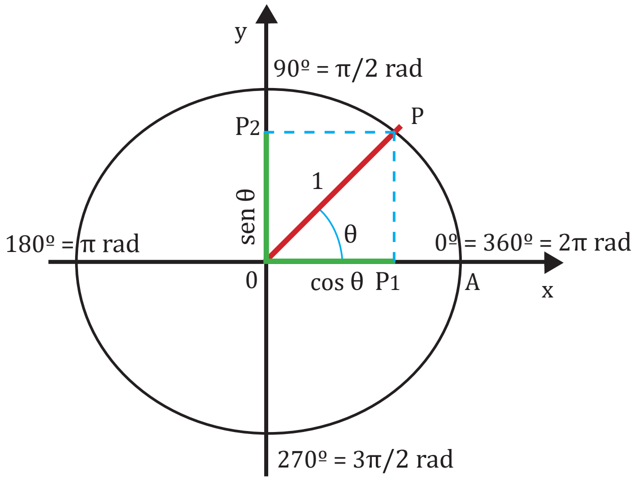
Figura 2.44: Ciclo trigonométrico.



Uma volta completa no ciclo representa um arco de 360° ou 2π rad. A vantagem de trabalharmos no ciclo trigonométrico é que se pode representar quaisquer ângulos ou arcos, incluindo aqueles das voltas negativas (-510° ou -420°, por exemplo) e os que são maiores que uma volta positiva (780° e 3π, entre outros). Isso é possível porque, para qualquer arco de comprimento α, pode-se associar um número inteiro k de voltas negativas ou positivas.

O ciclo trigonométrico pode ser associado a um sistema de coordenadas, onde a abscissa (eixo x) representa o cosseno de um ângulo ou arco e a ordenada (eixo y) o seno do mesmo. Da Figura 2.45, observa-se que o arco AP é representado pelo ângulo θ. Para se determinar o cos θ, deve-se projetar no eixo x o ponto P. A distância OP1 representa o cosseno do ângulo θ. Analogamente, para se determinar o sen θ, deve-se projetar no eixo y o mesmo ponto P. A distância OP2 representa o seno do ângulo θ. O par ordenado do ponto P é P(cos θ, sen θ).

Figura 2.45: Ciclo trigonométrico representado seno e cosseno do ângulo θ.



Observa-se que como o raio do ciclo é igual a 1, cos θ e sen θ, mostrados na Figura 2.45, são menores que 1, pois as projeções OP1 e OP2 são menores que o raio do referido ciclo. Com isso, observa-se que o ângulo que tem o maior cosseno (igual a 1) é o ângulo 0° = 360° = 2π rad (uma volta completa), pois a projeção do ângulo 0° no eixo x é o segmento AO = raio. Com esse raciocínio, o ângulo que tem o menor cosseno (igual a -1) é 180° = π rad, pois a projeção desse ângulo no eixo x é também em cima do raio, mas do seu lado negativo do sistema de coordenadas.

Com relação aos senos máximo e mínimo, deve-se olhar agora a projeção no eixo y e observa-se que sen 90° = 1 e sen 270° = -1.

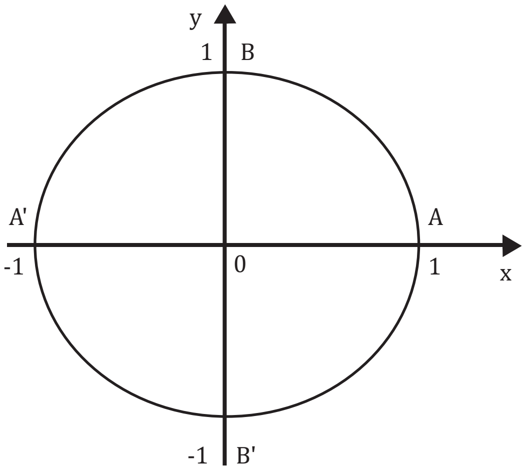
Logo, se o ciclo trigonométrico é associado a um sistema de coordenadas, define-se que:

cos θ = abscissa de P

sen θ = ordenada de P

$$tg\theta = \frac{sen\,\theta}{\cos\theta},\ \text{se}\ \cos\theta \neq 0$$

Figura 2.46: Ciclo trigonométrico representando os pontos de seno e cosseno máximos e mínimos.



A Figura 2.46 representa os pontos onde se tem seno e cosseno máximos e mínimos. Os ângulos representados pelos pontos A, A´, B e B´ estão expressos na Figura 2.45. A Tabela 2.1 a seguir mostra o seno, o cosseno e a tangente dos principais ângulos na trigonometria, ou seja, além dos ângulos expressos por tais pontos, tem-se também os ângulos notáveis, que são: 30° = π/6 rad; 45° = π/4 rad e 60° = π/3 rad.

Tabela 2.1: Seno, cosseno e tangente dos principais ângulos na trigonometria.

Ângulo θ	sen θ	cos θ	tg θ
0° = 360° = 2π rad	0	1	0
30° = π/6 rad	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45° = π/4 rad	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60° = π/3 rad	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90° = π/2 rad	1	0	Não existe
180° = π rad	0	–1	0
270° = 3π/2 rad	–1	0	Não existe

Observa-se que tg 90° e tg180° não existem, pois os cossenos desses ângulos são iguais a zero e como

$tg\theta = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta}$ e o denominador de uma razão não pode ser igual a zero, essas tangentes não existem.

Os gráficos das funções seno, cosseno e tangente no intervalo de [0; 2π] são expressos nas Figuras 2.47, 2.48 e 2.49 respectivamente.

Na Figura 2.47, que expressa o gráfico da função y = sen x, observa-se claramente que sen 0 = 0; sen π = 0 e sen 2π = 0, ao passo que sen π/2 = 1 e sen 3π/2 = –1, assim como se pode verificar através do ciclo trigonométrico.

Já na Figura 2.48, que expressa o gráfico da função y = cos x, observa-se claramente que cos π/2 = 0 e cos 3π/2 = 0. Além de cos 0 = 1; cos π = –1 e cos 2π = 1.

Figura 2.47: Gráfico da função y = sen x no intervalo [0; 2π].

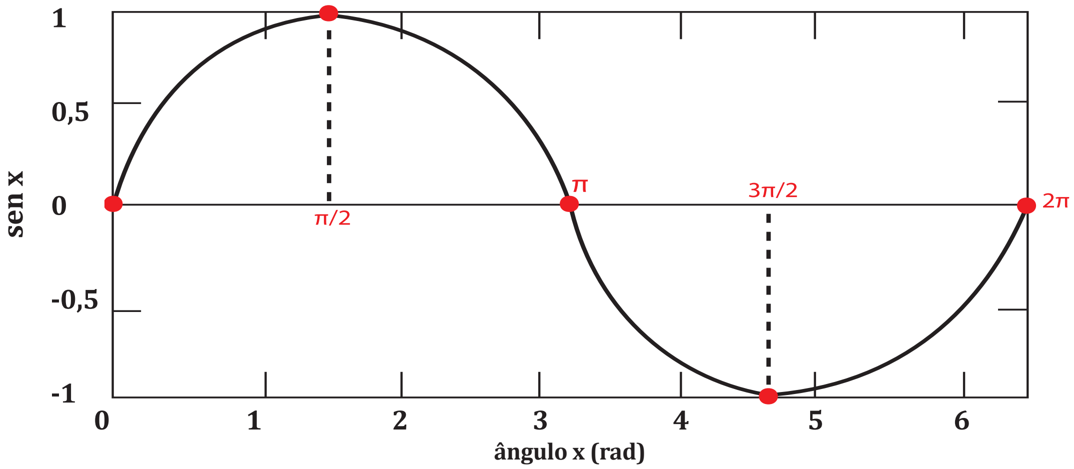
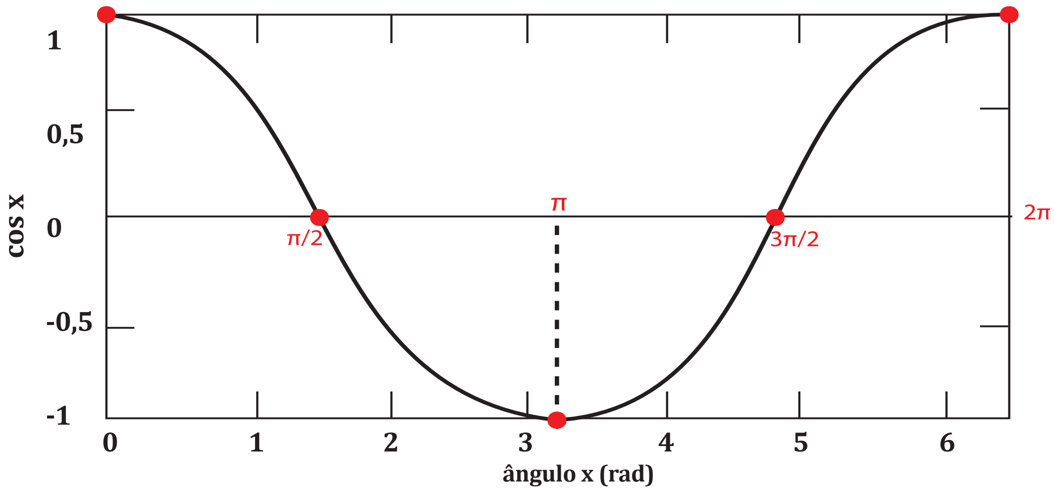
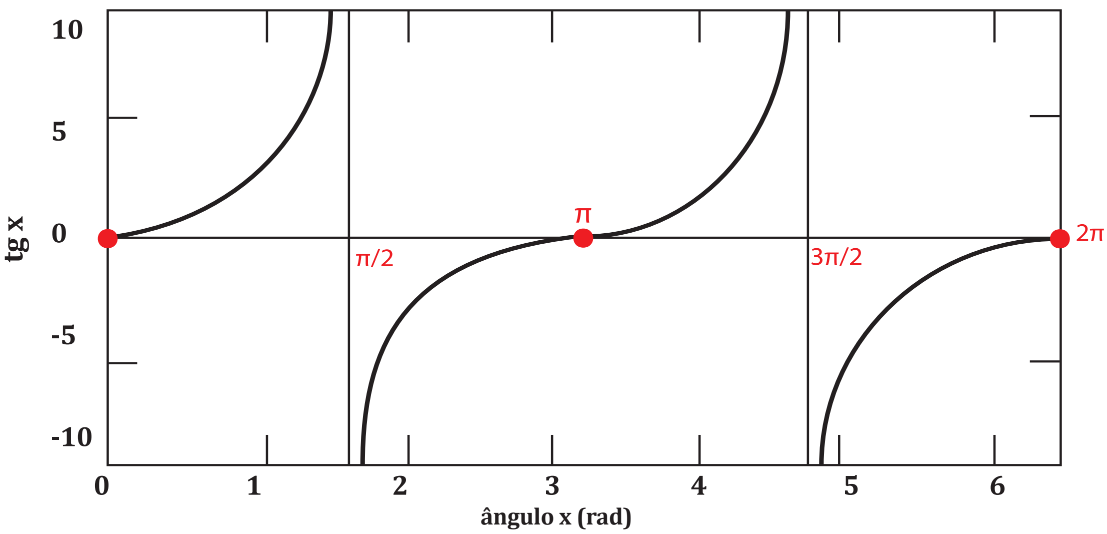


Figura 2.48: Gráfico da função y = cos x no intervalo [0; 2π].



Para o caso da tangente na Figura 2.49, observa-se duas assíntotas em π/2 rad (90°) e em 3π/2 rad (270°), que são os pontos onde essa função não existe, como comentado anteriormente. Para os demais pontos, pode-se obter o valor da tangente e do gráfico. Tem-se que tg 0 = 0; tg π = 0 e tg 2π = 0.

Figura 2.49: Gráfico da função y = tg x no intervalo [0; 2π].



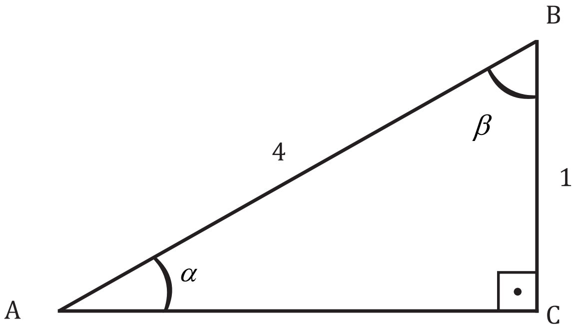
EXERCÍCIO PROPOSTO

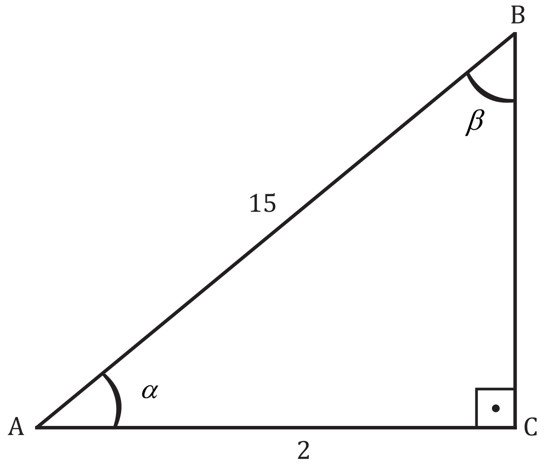
1. Calcule o valor das relações trigonométricas, a partir do valor dado, supondo que $0 < \alpha < 2\pi$.

a) Sabendo que $sen\alpha = \frac{1}{4}$, calcule cos α, tg α, cotg α, sec α e cossec α.

b) Sabendo que $\sec\alpha = \frac{12}{5}$, calcule sen α, cos α, tg α, cotg α e cossec α.

Para auxiliar no exercício, em cada caso, considere os lados dos triângulos retângulos.





2. Construa o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = sen(2x)$ b) $f(x) = \cos(3x)$ c) $f(x) = tg(4x)$

d) $f(x) = sen(3x) - 2$ e) $f(x) = 3\cos x$

3. Transforme os ângulos de graus para radianos:

a) 315° b) 85° c) 240° d) 150°

4. Transforme os ângulos de radianos para graus:

a) π/18 rad b) π/9 rad c) 6π rad d) 7π/6 rad

5. Para que valores de θ, em radianos e em graus, se tem:

a) $sen\theta = -\frac{1}{2}$ b) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $tg\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

6. Calcule:

a) $sen 315°$ b) cos 240°

7. Prove as relações:

a) $\sec^2 x = 1 + tg^2 x$ b) $cosec^2 x = 1 + cotg^2 x$

III

POLINÔMIOS, MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

Na unidade 3, iremos estudar os polinômios e suas operações, além das matrizes, determinantes e sistemas lineares. Os conteúdos desta unidade são fundamentais para o cálculo e também para a álgebra linear. A notação matricial alavancou o desenvolvimento de inúmeras tecnologias, notadamente no que diz respeito à programação como ferramenta para solucionar problemas matemáticos e outros.

Como objetivos desta unidade, pode-se citar:

- Conceituar os polinômios;
- Realizar operações com polinômios;
- Conceituar matrizes;
- Realizar operações com matrizes;
- Calcular determinantes;
- Estudar os sistemas lineares.

Conceito de polinômios

UN 03

O conceito de polinômio é fundamental dentro da matemática. Vários problemas dependem da determinação das raízes de polinômios ou da aplicação de suas operações.

Um polinômio que tem como incógnita X e possui a coeficientes é uma expressão que pode ser escrita da seguinte forma:

$$P(x) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

Onde os coeficientes são a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 que são números reais. O índice n é um número inteiro maior ou igual a zero. n também é o grau do polinômio, ou seja, o grau de $P(X) = n$.

O termo a_0 é o termo independente do polinômio P(X). Quando $a_n = 1$, diz-se que o polinômio é mônico.

Exemplos:

1. $P(X) = 6X^5 - 3X^2 + 2X - 4$

Para o primeiro exemplo, trata-se de um polinômio do grau 5 cuja incógnita é X. Com relação aos coeficientes de P(X), observa-se que: $a_5 = 6$; $a_4 = 0$; $a_3 = 0$; $a_2 = -3$; $a_1 = 2$ e o termo independente $a_0 = -4$. Pode-se observar ainda que o polinômio não é mônico, pois $a_5 \neq 1$.

2. $Q(X) = X^3 - X - \sqrt{7}$

Para o segundo exemplo, trata-se de um polinômio do terceiro grau cuja incógnita é X. Seus coeficientes pertencem aos números reais e são: $a_3 = 1$; $a_2 = 0$; $a_1 = -1$ e o termo independente $a_0 = \sqrt{7}$. Pode-se observar ainda que o polinômio é mônico, pois $a_3 = 1$.

Cada termo do polinômio é chamado de monômio, logo o polinômio é uma soma de monômios.

O conjunto de todos os polinômios em uma incógnita X a coeficientes reais é denotado por $\mathbb{R}\left[X\right]$.

Na sequência, serão tratadas as operações com os polinômios, a saber: adição, diferença, produto e quociente de polinômios com uma dada incógnita.

Operações com polinômios

UN 03

Adição de polinômios

A soma de dois polinômios P(X) e Q(X) é feita adicionando-se os monômios do mesmo grau de cada polinômio.

Exemplos:

1. Considere os polinômios P(X) e Q(X)

$$P(X) = 6X^5 - 3X^2 + 2X - 4$$

$$Q(X) = X^3 - X - 7$$

Logo $P(X) + Q(X) = 6X^5 + X^3 - 3X^2 + X - 11$

2. Considere os polinômios R(X) e S(X)

$$R(X) = 3X^3 - 2X^2 - 2$$

$$S(X) = X^2 + X - 12$$

Logo $R(X) + S(X) = 3X^3 - X^2 + X - 14$.

Produto de um número por um polinômio

Dado o polinômio $P(x) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \; de \; \mathbb{R}[X]$ e k um número real, o produto de k por P(X) é dado por:

$$kP(x) = ka_n \; X^n + ka_{n-1} \, X^{n-1} + \ldots + ka_1 X + ka_0$$

Ou seja, k será multiplicado por cada monômio de P(X).

Exemplo:

Considere o polinômio

$$P(X) = 6X^5 - 3X^2 + 2X - 4 \;\text{ e }\; k = 2$$

$$2P(X) = 12X^5 - 6X^2 + 4X - 8$$

Diferença de polinômios

A diferença de dois polinômios P(X) e Q(X) é feita da seguinte maneira:

$$P(X) - Q(X) = P(X) + (-1).Q(X)$$

Exemplos:

1. Considere os polinômios P(X) e Q(X)

$$P(X) = 6X^5 - 3X^2 + 2X - 4$$

$$Q(X) = X^3 - X - 7$$

$$P(X) - Q(X) = (6X^5 - 3X^2 + 2X - 4) + (-1).(X^3 - X - 7)$$

$$\text{Logo, } P(X) - Q(X) = 6X^5 - X^3 - 3X^2 + 3X + 3$$

2. Considere os polinômios R(X) e S(X)

$$R(X) = 3X^3 - 2X^2 - 2$$

$$S(X) = X^2 + X - 12$$

$$R(X) - S(X) = (3X^3 - 2X^2 - 2) + (-1).(X^2 + X - 12)$$

Logo, $R(X) - S(X) = 3X^3 - 3X^2 + 10$

Produto de polinômios

O produto de polinômios se faz aplicando-se seguidamente a propriedade distributiva, ou seja,

$$(a + b).(c + d) = a.(c + d) + b.(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Logo, para a multiplicação de dois polinômios, deve-se multiplicar cada termo do primeiro polinômio por todos os outros termos do segundo.

Exemplo:

Considere os polinômios P(X) e Q(X)

$$P(X) = 3X^2 + 2X - 4$$

$$Q(X) = X - 7$$

$$P(X) \cdot Q(X) = (3X^2 + 2X - 4) \cdot (X - 7)$$

$$P(X) \cdot Q(X) = 3X^2 \cdot (X - 7) + 2X \cdot (X - 7) - 4 \cdot (X - 7)$$

$$P(X) \cdot Q(X) = 3X^3 - 21X^2 + 2X^2 - 14X - 4X + 28$$

Logo, $P(X) \cdot Q(X) = 3X^3 - 19X^2 - 18X + 28$

Sejam P(X) e Q(X) dois polinômios de tal forma que o gr(P) = m (lê-se: grau de P) e gr(Q) = n, o grau do produto dos dois polinômios é gr(P.Q) = gr(P) + gr(Q) = m + n.

Para o exemplo acima gr(P) = 2 e gr(Q) = 1, logo gr(P.Q) = 2 + 1 =3.

Polinômio nulo

Um polinômio é dito nulo ou identicamente nulo quando todos os seus coeficientes a são nulos, então $P(X) \equiv 0$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja $P(X) = (m^2 - 9)X^2 + (n - 1)X + (p - 5)$. Calcule os valores de m, n e p para que P(X) seja um polinômio identicamente nulo.

Resposta:
Para que P(X) seja nulo, todos os seus coeficientes devem ser nulos, ou seja,

$$m^2 - 9 = 0;\ n - 1 = 0 \ \text{ e } \ p - 5 = 0$$

Logo, $m = \pm 3$; $n = 1$ e $p = 5$

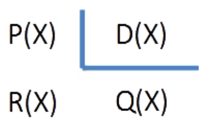
Quociente de polinômios

Para se realizar o quociente entre dois polinômios, utiliza-se o Algoritmo de Euclides ou Algoritmo da Divisão, que se baseia no seguinte: sejam dois polinômios quaisquer P(X) e D(X), sempre é possível se determinar outros dois polinômios Q(X) e R(X) de tal forma que

$$P(X) = Q(X) \cdot D(X) + R(X)$$

Onde R(X) é identicamente nulo ou o seu grau satisfaz a desigualdade $0 \leq gr(R) < gr(D)$. Chama-se P(X) de dividendo, D(X) de divisor, Q(X) de quociente e R(X) de resto da divisão. Pode-se ilustrar esses polinômios da seguinte maneira, de acordo com a Figura 3.1.

Figura 3.1: *Quociente de polinômios.*



EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine o quociente Q(X) e o resto R(X) dos polinômios $P(X) = 9X^3 + 12X - 135$ E $D(X) = X^2 + 2X$

Resposta:
Para determinar Q(X) e R(X), deve-se colocar os polinômios como na Figura 3.1, de tal forma como são efetuadas as divisões comuns. A divisão será efetuada e comentada passo a passo.

O primeiro passo é dividir o monômio de maior grau do dividendo P(X) pelo monômio de maior grau do divisor D(X). Observa-se que $9x^3$ dividido por x^2 é $9x$. Esse resultado é colocado no espaço do quociente Q(X).

$$
\begin{array}{l|l}
\boxed{9x^3} + 12x - 135 & \boxed{x^2} + 2x \\ \cline{2-2}
 & \boxed{9x}
\end{array}
$$

O segundo passo é multiplicar o primeiro monômio do quociente (9x) por cada termo do divisor D(X) e subtrair esse produto do dividendo P(X). Por conta da subtração, todos os sinais desse produto serão trocados. Para facilitar a adição algébrica dos polinômios, escreve-se o polinômio completo, inclusive com os coeficientes com valor zero.

$$
\begin{array}{l|l}
9x^3 + 0x^2 + 12x - 135 & x^2 + 2x \\ \cline{2-2}
-9x^3 - 18x^2 & 9x \\ \cline{1-1}
-18x^2 + 12x - 135 & \\
\text{(primeiro resto parcial)} &
\end{array}
$$

O terceiro passo será mais uma vez dividir o monômio de maior grau do primeiro resto parcial pelo monômio de maior grau do divisor D(X). Observa-se que $-18x^2$ dividido por x^2 é -18. Esse resultado é acrescentado no espaço do quociente Q(X).

$$
\begin{array}{l|l}
9x^3 + 0x^2 + 12x - 135 & \boxed{x^2} + 2x \\ \cline{2-2}
-9x^3 - 18x^2 & 9x \ \boxed{-18} \\ \cline{1-1}
\boxed{-18x^2} + 12x - 135 & \\
\text{(primeiro resto parcial)} &
\end{array}
$$

No quarto passo, repete-se o segundo passo, onde desta vez o segundo monômio do quociente (–18) é multiplicado por cada termo do divisor D(X) e esse produto é subtraído do primeiro resto parcial.

$$
\begin{array}{l|l}
9x^3 + 0x^2 + 12x - 135 & x^2 + 2x \\ \cline{2-2}
-9x^3 - 18x^2 & 9x \ -18 \\ \cline{1-1}
-18x^2 + 12x - 135 & \text{(primeiro resto parcial)} \\
-18x^2 + 36x & \\ \cline{1-1}
48x - 135 & \text{(resto R(x))}
\end{array}
$$

Observa-se que o grau do resto R(X) é igual a 1 e o grau do divisor D(X) é igual a 2. Quando se tem gr(R) < gr(D), encerra-se a divisão. Então R(X) = 48x – 135 e Q(X) = 9x - 18. Para verificar que realmente se tem a resposta correta, basta verificar utilizando o Algoritmo de Euclides, onde P(X) = Q(X)D(X) + R(X).

Raiz ou zero de um polinômio

Dado o polinômio $P(x)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0\ de\ \mathbb{R}[X]$ de grau n. As raízes ou zeros do polinômio são os valores de X para que P(X) = 0.

É importante ressaltar que o número de zeros ou raízes do polinômio é igual ao grau do mesmo. Se o gr(P) = n, existirão n raízes para o polinômio P(X), ainda que existam raízes iguais ou repetidas.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine os zeros dos polinômios abaixo:

a) $P(x) = X^2 – 7X + 12$ b) $Q(X) = X^3 + 4X^2 + 4X$

Resposta:
a) Nesse primeiro item, tem-se um polinômio do segundo grau. Logo, ter-se-á duas raízes para o mesmo. Para determiná-las, basta fazer P(X) = 0 e resolver a equação do segundo grau. Calculando-se o valor de Δ, tem-se:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4\cdot 1\cdot 12 \Rightarrow \Delta = 49 - 48 = 1$$

Logo, as raízes serão:

$$X = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7\pm 1}{2}$$

Então: $X_1=4$ e $X_2=3$ são as duas raízes ou os zeros de P(X).

b) No segundo item, tem-se um polinômio do terceiro grau. Logo, devem-se calcular as três raízes. Em primeiro lugar, coloca-se X em evidência e obtém-se

$$Q(X) = X^3 + 4X^2 + 4X = X(X^2 + 4X + 4)$$

Para se determinar as raízes, deve-se fazer $Q(X)=0$. Logo:

$$\underbrace{X}_{1^{\underline{o}}\ \text{termo}}\underbrace{(X^2+4X+4)}_{2^{\underline{o}}\ \text{termo}} = 0$$

Como temos a multiplicação de dois termos, o primeiro é igual a zero ou o segundo é igual a zero. Então X = 0 ou $(X_2 + 4X + 4) = 0$.

A partir daí, conclui-se que a primeira raiz $X_1 = 0$.

As segunda e terceira raízes são calculadas a partir de $(X^2 + 4X + 4) = 0$
Resolvendo essa equação do segundo grau, vem:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 \Rightarrow \Delta = 16 - 16 = 0$$

Logo, as raízes serão:

$$X = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4\pm 0}{2}$$

Então: X_2=-2 e X_3=-2 e as raízes de Q(X) são {-2; -2; 0}.
Observa-se que a raiz -2 é repetida duas vezes.

Divisibilidade de polinômios

O polinômio P(X) é divisível pelo polinômio D(X) quando o resto da divisão de P(X) por D(X) é igual a zero, ou seja, R(X) = 0. Em outras palavras, o Algoritmo de Euclides, visto na seção 3.2.6, se reduz a

$$P(X)=Q(X)D(X) \text{ ou } \frac{P(X)}{D(X)}=Q(X)$$

Logo P(X) dividido por D(X) é igual a Q(X).

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Mostre que o polinômio $X^3 - a^3$ é divisível pelo polinômio X - a e que

$$\frac{X^3-a^3}{X-a}=X^2+aX+a^2$$

Resposta:
Calculando a divisão, tem-se que:

$$\begin{array}{rl|l}
x^3 & -\,a^3 & x - a \\ \cline{3-3}
-x^3 + ax^2 & & x^2 + ax + a^2 \\ \hline
ax^2 & -\,a^3 & \\
-ax^2 + a^2x & & \\ \hline
a^2x & -\,a^3 & \\
-a^2x & +\,a^3 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Como o resto é igual a zero, prova-se que o polinômio $X^3 - a^3$ é divisível pelo polinômio X - a e que o quociente deles é $X^2 + aX + a^2$.

2. Mostre que se o polinômio P(X) é divisível por X – r, então P(r) = 0.

Resposta:
Se P(X) é divisível por X – r, então aplica-se:

$$P(X) = Q(X)\,D(X) \Rightarrow P(X) = Q(X)(X-r)$$
$$P(r) = Q(r)\,(r-r) = Q(r)\cdot 0 = 0$$

Logo, todo polinômio P(X) será divisível por X – r se r for uma **raiz** desse polinômio.

Relações entre coeficientes e raízes

As equações quadráticas ou do 2º grau são do tipo

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a \neq 0$$

Essa equação possui duas raízes, nomeadas r_1 e r_2. Tal equação pode ser reescrita da seguinte forma

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

A partir dessa igualdade, pode-se verificar que

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \; e \; r_1 \;\; r_2 \doteq \frac{c}{a}$$

Tais igualdades são conhecidas como relações de Girard para uma equação quadrática. Elas expressam uma relação entre coeficientes e raízes de uma equação do 2º grau.

Exemplo:

Considerando r_1 e r_2 as raízes da equação do 2º grau $X^2 - 7X + 12$, calcule:

a) $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-7)}{1} = 7$

b) $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a} = \frac{12}{1} = 12$

Para um polinômio do terceiro grau do tipo $P(X) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$, o mesmo procedimento pode ser usado e este pode ser fatorado da seguinte forma:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)\,(x - r_2)\,(x - r_3)$$

A partir dessa igualdade, tem-se que o primeiro membro da expressão pode ser reescrito como

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}\right)$$

E o segundo membro pode ser reescrito da seguinte forma

$$a(x - r_1)\,(x - r_2)\,(x - r_3) = a[x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)\,x^2 + (r_1\,r_2 + r_1\,r_3 + r_2\,r_3)\,x + (r_1\,r_2\,r^3)]$$

Igualando as duas novas expressões, obtém-se o seguinte:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a}$$

$$r_1r_2r_3 = \frac{d}{a}$$

Um polinômio de grau n tem relações análogas aos de grau 2 e 3, ou seja, para

$$P(x) = a_n\,X^n + a_{n-1}\,X^{n-1} + \ldots + a_1\,X + a_0 \;\; (a_n = 0)/$$

$$a_n\,X^n + a_{n-1}\,X^{n-1} + \ldots + a_1\,X + a_0 = a_n .(X - r_1).(X - r_2) \cdot \ldots \cdot (X - r_n)$$

Além do mais

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = -\frac{a_n - 1}{a_n}$$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n = (1)^2 \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_2 r_5 + \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = (-1)^2 \frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$r_1 r_2 r_3 \ldots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Essas são as relações de Girard para um polinômio de grau n.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Sejam $P(X) = 4X^4 - 3X^2 + 1$ e $Q(X) = 2X^3 - 4X - 7$, calcule:

a) $P(X) + Q(X)$ b) $P(X) - Q(X)$ c) $2P(X).3Q(X)$ d) $P(X).Q(X)$

e) $gr(PQ)$ f) $[P(X)]^2 + [Q(X)]^2$

2. Determinar os valores de m e n para que os polinômios $P(x) = (m^2 - 3m)x^2 + 4x - 1$ e $Q(x) = -2x^2 + (n + 3)x - 1$ sejam idênticos.

3. Determine o quociente Q(X) e o resto R(X) dos seguintes polinômios:

a) $P(X) = 6X^5 = 12X^4 - 3X^2 - 15$ E $D(X) = X^2 + 2$

b) $P(X) = X^4 - 5X^2 - 3X$ E $D(X) = X^3 + 5X^2 - 1$

c) $P(X) = 2X^3 - 7X + 35$ E $D(X) = X - 1$

4. Aplicando as relações de Girard:

a) Encontre um polinômio do grau 3 cujas raízes são 1, 3 e 5.

b) Encontre um polinômio de grau 4 com coeficiente líder 3 e cujas raízes sejam −2, −1, 1, 2.

Matrizes: definição e operações

Neste tópico, serão estudadas as matrizes e certas operações algébricas nela definidas. Uma matriz é uma tabela com m linhas (horizontais) e n colunas (verticais) nomeada matriz m x n (lê-se: matriz m por n). Elas são muito utilizadas para resolver sistemas de equações lineares e transformações lineares. São importantes também para problemas computacionais.

Seja K uma matriz arbitrária disposta da forma retangular seguinte

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2m} \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mm} \end{pmatrix}$$

Onde os a_{ij} são escalares em K. A matriz K também tem a seguinte notação K = (a_{ij}). O índice i da matriz significa em que linha (horizontal) está determinado elemento. Este índice varia de 1 até m (i = 1, ..., m). O índice j da matriz significa em que coluna (vertical) está o mesmo elemento. Este índice varia de 1 até n (j = 1, ..., n). Em outras palavras, o elemento de K que está na i-ésima linha e na j-ésima coluna é chamado de elemento i,j ou (i,j)-ésimo elemento de K. Este tem a notação a_{ij}. O par de números (m, n) é chamado tamanho ou forma da matriz.

Exemplo:

A matriz A seguinte tem uma forma 2x3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

A possui duas linhas e três colunas.

Suas linhas são: (2 -2 6) e (1 4 0).

Suas colunas são: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tem-se que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo: $a_{11} = 2$; $a_{12} = -2$; $a_{13} = 6$; $a_{21} = 1$; $a_{22} = 4$; $a_{23} = 0$.

As matrizes são denotadas por letras maiúsculas (A, B, ...) e seus elementos por letras minúsculas (a, b, ...). Duas matrizes A e B são iguais se elas tiverem a mesma forma e se seus elementos correspondentes forem também iguais.

Uma matriz é dita matriz linha quando ela tiver uma linha e n colunas (também chamado de vetor linha). Por outro lado, uma matriz coluna tem m linhas e 1 coluna (também chamado de vetor coluna).

Exemplos:

(2 – 2 6) é uma matriz linha ou vetor linha com forma 1x3.

$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz coluna ou vetor coluna com forma 2x1.

Adição de matrizes e multiplicação por um escalar

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes m x n com a mesma forma, ou seja, mesmo número de linhas e mesmo número de colunas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{mn} \end{pmatrix}$$

A soma das matrizes A + B se dá adicionando-se os termos correspondentes de A e B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

O produto de um número escalar k pela matriz A, por exemplo, é simplesmente kA, ou seja, a multiplicação de k por cada elemento da matriz A.

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Observa-se que tanto no primeiro caso (A + B) como no segundo (kA) as matrizes resultantes têm a mesma forma inicial m x n. Não é possível estabelecer a soma de matrizes com tamanhos diferentes.

Através desses dois casos, pode-se afirmar também que:

$$-A = (-1) \cdot A \ \text{ e } \ A - B = A + (-B)$$

Exemplos:

Sejam $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $e\ B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} -2+2 & 3-2 \\ 0+1 & 1+0 \\ 1+5 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2(-2) & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 0 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 0 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 13 \\ -2 & 3 \\ -7 & 18 \end{pmatrix}$$

As propriedades básicas da adição de matrizes e da multiplicação das mesmas por um escalar, sendo V o conjunto de todas as matrizes m x n sobre um corpo K e para quaisquer matrizes A, B, C ∈ V e quaisquer escalares k_1 e $k_2 \in K$ são as seguintes:

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$

2) $A + 0 = A$

3) $A + (-A) = 0$

4) $A + B = B + A$

5) $k_1(A + B) = k_1 A + k_1 B$

6) $(k_1 + k_2)A = k_1 A + k_2 A$

7) $(k_1 k_2)A = k_1(k_2 A)$

8) $1 \cdot A = A$ e $0 \cdot A = 0$

Multiplicação de matrizes

O produto de matrizes AB é algo mais complicado. Supondo que $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes tais que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Ou seja, se A é uma matriz de forma m x p e B é uma matriz p x n. A Figura 3.2 ilustra quando é possível haver multiplicação de matrizes. Então o produto das duas matrizes terá a forma m x n cujo elemento ij do produto é obtido multiplicando a i-ésima linha A_i de A pela j-ésima coluna B_j de B.

Figura 3.2: *Esquema do produto de matrizes.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{ml} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}_{mxp} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{pl} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}_{pxn} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \boxed{c_{ij}} & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Onde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k-1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

Vale ressaltar que o produto AB não é definido se A é uma matriz de forma m x p e B é uma matriz do tipo q x n, pois $p \neq q$.

Exemplos:

1) Sejam $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} e\, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2x2} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & \boxed{a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}} \end{pmatrix}_{2x3}$$

Nota-se que a multiplicação de uma matriz 2x2 por uma 2x3, pode ser realizada, pois o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda. Além do mais, a matriz produto terá a forma 2x3, que é o número de linhas da primeira pelo número de colunas da segunda, assim como ilustram as flechas acima.

Admitindo que a matriz produto é C = AB, para se determinar o elemento c_{11}, por exemplo, deve-se utilizar a linha 1 da matriz A e a coluna 1 da matriz B. Da mesma forma, para se determinar o elemento c_{23}, deve-se utilizar a linha 2 da matriz A e a coluna 3 da matriz B. Basta verificar o índice de c_{23} (linha 2 e coluna 3) e efetuar a multiplicação do primeiro elemento da linha 2 de A pelo primeiro elemento da coluna 3 de B e somar com a multiplicação do segundo elemento da linha 2 de A com o segundo elemento da coluna 3 de B, como ilustrado nas caixas acima.

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}_{2x2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+5\cdot 3 & 1\cdot(-2)+5\cdot 6 \\ (-2)\cdot 2+3\cdot 3 & (-2)\cdot(-2)+3\cdot 6 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 17 & 28 \\ 5 & 22 \end{pmatrix}_{2x2}$$

3) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{3x2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{2x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+0\cdot(-1) & 1\cdot 3+0\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot(-2) \\ (-1)\cdot 1+0(-1) & (-1)\cdot 3+0\cdot 0 & (-1)\cdot 0+0\cdot(-2) \\ 3\cdot 1+2(-1) & 3\cdot 3+2\cdot 0 & 3\cdot 0+2\cdot(-2) \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}_{3x3}$$

O exemplo acima mostra que a multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja, os produtos de matrizes AB e BA não são necessariamente iguais.

Para a multiplicação de matrizes, têm-se as seguintes propriedades:

1) (AB)C = A(BC)

2) A(B + C) = AB + AC

3) (B + C)A = BA + CA

4) k(AB) = (kA)B = A(kB), onde k é um escalar.

Transposta de uma matriz

A transposta de uma matriz A tem como símbolo A^t e é obtida escrevendo as linhas de A como colunas, ou seja, a primeira linha será na matriz transposta à primeira coluna, a segunda linha será a segunda coluna e assim por diante.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Observa-se que, se A é uma matriz m x n, então sua transposta A^t será uma matriz da forma n x m, visto que trocamos as linhas por colunas.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^t_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Com relação à matriz transposta, pode-se citar as seguintes propriedades:

1) $(A + B)^t = A^t + B^t$

2) $(A^t)^t = A$

3) $(kA)^t = kA^t$, para k um escalar.

4) $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

Matrizes e sistemas de equações lineares

Os sistemas de equações lineares serão vistos em um tópico mais adiante, porém o que interessa aqui é mostrar que um sistema linear pode ser escrito na forma matricial, o que pode auxiliar bastante em programações computacionais para a resolução de tais sistemas. Entretanto, a resolução dos sistemas não é objeto do tópico atual.

O sistema de equações lineares a seguir

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

É equivalente à equação matricial seguinte

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Esse produto matricial equivale a AX = B, onde $A = (a_{ij})$, matriz com i linhas e j colunas e $B = (b_j)$ é o vetor coluna, que tem uma linha e j colunas.

Exemplo:

O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 2 \\ 5x - 2y + z = 1 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

É equivalente à seguinte equação matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Matrizes quadradas

Uma matriz quadrada é aquela que possui o mesmo número de linhas e colunas, ou seja, ela é da forma n x n ou matriz quadrada de ordem n.

A diagonal da matriz quadrada $A = (a_{ij})$ consiste nos elementos $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$.

Exemplo:

A matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é quadrada de ordem 3 (matriz de forma 3 x 3) e seus elementos diagonais são 2, -2 e 1, pois $a_{11} = 2$; $a_{22} = -2$ e $a_{33} = 1$.

Uma matriz triangular superior ou simplesmente matriz triangular é uma matriz quadrada cujos elementos abaixo da diagonal principal são todos elementos nulos (Figura 3.3).

Figura 3.3: *Matriz quadrada superior.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Da mesma forma que uma matriz triangular inferior é uma matriz quadrada cujos elementos acima da diagonal principal são todos elementos nulos (Figura 3.4).

Figura 3.4: *Matriz quadrada inferior.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Uma matriz diagonal é uma matriz quadrada em que todos os elementos que não são da diagonal são iguais a zero (Figura 3.5).

Figura 3.5: *Matriz diagonal.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \ldots & & 0 \\ 0 & a_{22} \ldots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A matriz diagonal em que todos os elementos da sua diagonal são iguais a 1 é chamada de matriz unidade ou matriz identidade I_n ou I (Figura 3.6).

Figura 3.6: *Matriz identidade.*

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizes inversíveis

Uma matriz quadrada A é dita inversível quando existe uma matriz B com a seguinte propriedade

$$A.B = B.A = I$$

Onde I é a matriz identidade.

A matriz B é chamada a inversa de A e é nomeada A^{-1}. Além do mais, esta relação é simétrica, ou seja, se B é a inversa de A, então A é a inversa de B.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-3)+5\cdot 2 & 3\cdot 5+5\cdot(-3) \\ 2(-3)+3\cdot 2 & 2\cdot 5+3(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-3)+5\cdot 2 & (-3)\cdot 5+5\cdot(3) \\ 2(3)+(-3)\cdot 2 & 2\cdot 5+3(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, as duas matrizes $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ são inversíveis e também são inversas uma da outra.

Considerando agora a matriz genérica 2 x 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ onde |A| é o determinante da matriz A e será estudado no tópico seguinte.

Determinantes

Para toda matriz quadrada A sobre um corpo K, existe um valor escalar associado chamado de determinante de A. Este é representado da seguinte forma:

det(A) ou |A|

O determinante foi descoberto primeiramente na investigação de sistemas lineares. Ele é uma ferramenta indispensável na obtenção das propriedades dos operadores lineares, assunto este que será visto na disciplina de Álgebra Linear.

Em primeiro lugar, para uma matriz quadrada 2 x 2, do tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Det (A) = |A| = ad – bc

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ então Det(A) = 3 . 3 –5 . 2 = 9 – 10 = –1.

O determinante pode ser visto como uma função da matriz A ou de suas colunas. Ou seja, Det(A) pode ser escrito como Det(A_1, A_2) onde A = (A_1, A_2) e A_1 e A_2 são as colunas da matriz A.

Para o caso de uma matriz 3 x 3, o determinante é definido da seguinte maneira:

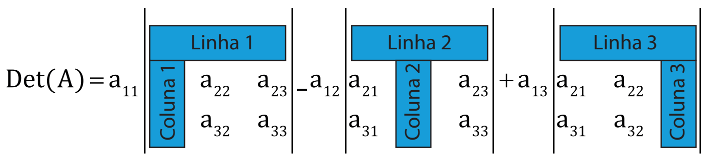
Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$Det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Observa-se que se têm três termos. Cada termo com um elemento da primeira linha (a_{11}, a_{12} e a_{13}) multiplicado por um determinante 2 x 2. Para se obter esse determinante 2 x 2, no primeiro termo (a_{11}), basta eliminar a linha 1 e a coluna 1 da matriz A, e o que resta formará o determinante 2 x 2. No segundo termo (a_{12}), deve-se eliminar a primeira linha e a segunda coluna, e no terceiro termo (a_{13}), a primeira linha e a terceira coluna, assim como ilustra a Figura 3.7 .

Figura 3.7: Determinação do determinante de uma matriz quadrada 3 x 3.



Se $A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} e\ A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

Então Det(A) = $a_{11}\,A_{11} - a_{12}\,A_{12} + a_{13}\,A_{13}$

Nesse caso, que utilizou-se na definição do determinante de uma matriz quadrada $n \times n$ é que se chama de desenvolvimento de Laplace em relação à primeira linha. Porém, pode-se escrever o desenvolvimento de Laplace, de maneira análoga, em relação a qualquer linha ou coluna da matriz. Demonstra-se que o valor obtido é o mesmo independentemente da linha ou coluna escolhida, desde que cada termo a_{ij} seja afetado do sinal apropriado que é $(-1)^{i+j}$, o que justifica o sinal negativo do segundo termo, pois para a_{12}, $(-1)^{i+j} = (-1)^{1+2} = -1$.

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ então:

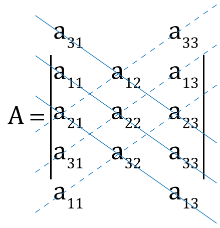
$$Det(A) = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,[(-2)\,1 - (1)\,(1)] - 3[(5)\,(1) - (1)\,(1)] + (-3)\,[(5)\,(1) - (1)\,(-2)]$$

$$= -6 - 12 - 21 = -39$$

Um método prático para se obter determinantes de matrizes quadradas 3 x 3 é mostrado na Figura 3.8, onde o primeiro termo da coluna 1 (a_{11}) é colocado abaixo do último termo da mesma coluna 1 (a_{31}) da coluna e este último termo da coluna 1 (a_{31}) é colocado acima do primeiro termo da mesma coluna 1 (a_{11}). O mesmo procedimento é feito na terceira coluna. Em seguida, traçam-se as diagonais, como mostra a Figura 3.8. Esse método foi desenvolvido pelo matemático Sarru, porém existem outras maneiras de calcular o determinante.

Figura 3.8: Obtenção de determinante em uma matriz quadrada 3 x 3.



Para o cálculo do determinante, devem-se multiplicar os termos das diagonais separadamente, e então, devem-se somar os produtos das diagonais contínuas e subtrair dos produtos das diagonais pontilhadas.

Ou seja,

$Det(A) = a_{31}\ a_{12}\ a_{23} + a_{11}\ a_{22}\ a_{33} + a_{21}\ a_{32}\ a_{13} - a_{21}\ a_{12}\ a_{33} - a_{31}\ a_{22}\ a_{13} - a_{11}\ a_{32}\ a_{23}$

Aplicando essa técnica ao exemplo anterior, tem-se que:

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ o seu determinante será:

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ \hline 2 & 3 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & -3 \end{array}$$

Det(A) = [(1).(3).(1)] + [(2).(-2).(1)] + [(5).(1).(–3)] – [(5).(3).(1)] – [(1).(-2).(-3)] – [(2).(1).(1)] = 3 – 4 – 15 – 15 – 6 – 2 = – 39.

Observa-se que o valor é o mesmo do exemplo anterior quando resolvido pelo desenvolvimento de Laplace.

Para uma matriz quadrada n x n qualquer, do tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Então, pelo desenvolvimento de Laplace, $Det(A)=a_{11}A_{11}- a_{12}A_{12}+\cdots(-1)^{n+1}\ a_{1n}A_{1n}$ onde A_{ij} é o de determinante da matriz (n – 1) x (n – 1) obtida de A eliminando a linha i e a coluna j.

Propriedades de determinantes

As propriedades básicas do determinante são as seguintes:

1. O determinante de uma matriz A e o de sua transposta A^t são iguais: $|A| = |A^t|$.

2. Se a matriz A tem uma linha ou coluna de zeros, então: $|A| = 0$.

3. Se a matriz A tem duas linhas ou colunas idênticas, então: $|A| = 0$.

4. Se a matriz A é triangular, ou seja, apresenta zeros acima ou abaixo da diagonal, então: |A| = x produto dos elementos da diagonal. A partir dessa propriedade, $|I| = 1$ (matriz identidade).

5. Sendo a matriz B obtida da matriz A pela multiplicação de uma linha ou coluna por um escalar k, então $|B| = k|A|$.

$$Det\begin{pmatrix} a & kb \\ c & kd \end{pmatrix} = kDet\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

6. $Det\begin{pmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + Det\begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}$ e analogamente para a primeira coluna.

7. Sendo a matriz B obtida da matriz A pela troca entre si de duas linhas (ou colunas) de A, então |B|=-|A|.

8. Sendo a matriz B obtida da matriz A pela adição de um múltiplo de uma linha (ou coluna) de A à outra, então |B|=|A|.

9. Se A é uma matriz quadrada e seu determinante é diferente de zero, A é inversível, ou seja, A possui uma inversa A^{-1}.

10. O determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto dos seus determinantes: |AB|=|A||B|

Sistemas de equações lineares

UN 03

Os sistemas de equações lineares têm um papel importante no campo da Álgebra Linear. De fato, vários problemas da Álgebra Linear são equivalentes ao estudo de um sistema de equações lineares.

Considerando um sistema de m equações lineares nas n incógnitas $x_1,\ldots,x_n$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

Onde os valores $a_{ij}\ e\ b_j \in \mathbb{R}$

Chama-se o sistema de equações lineares de homogêneo se as constantes b_1, ..., b_n são todas iguais a zero.

u = (k_1, ..., k_n) é a solução do sistema ou solução particular se estes valores satisfazem a cada uma das equações. O conjunto de todas essas soluções é denominado conjunto solução ou solução geral.

O sistema de equações lineares dito homogêneo é do tipo

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{gathered}$$

O sistema acima sempre tem solução, a saber: 0 = (0, 0, ... , 0), chamada de solução zero ou trivial. Qualquer outra solução será não nula ou não trivial.

Método de eliminação de variáveis

Para solucionar o sistema de equações lineares não homogêneo, deve-se reduzir o mesmo a um sistema mais simples. O método que elimina uma incógnita de equações sucessivas é conhecido como método de eliminação de variáveis.

Exemplo:

Seja o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Através de uma manipulação entre as linhas, devem-se eliminar as variáveis. Considerando a linha 1 como L_1, a linha 2 como L_2 e a terceira L_3, pode-se eliminar a incógnita x aplicando as operações seguintes:

$L_2 \rightarrow -2L_1 + L_2$, ou seja, a linha L_2 será substituída por essa operação de multiplicar a linha 1 por -2 e somar isso à linha 2.

Logo:

$$\begin{array}{c} -2L_1 : -2x - 2y - 4z = -18 \\ +L_2 : 2x + 4y - 3z = 1 \\ \hline -2L_1 + L_2 : 2y - 7z = -17 \end{array}$$

Em seguida, deve-se fazer uma manipulação semelhante na terceira equação para também eliminar a incógnita x. Aplica-se a seguinte operação:

$$L_3 \rightarrow -3L_1 + L_3$$

$$\begin{array}{c} -3L_1 : -3x - 3y - 6z = -27 \\ +L_3 : 3x + 6y - 5z = 0 \\ \hline -3L_1 + L_3 : 3y - 11z = -27 \end{array}$$

Obtém-se, então, o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = 17 \\ 3y - 11z = -27 \end{cases}$$

As segunda e terceira equações formam um sistema de duas equações e duas incógnitas (y e z). Aplicando o mesmo procedimento para as equações 2 e 3, elimina-se a variável y e se obtém a variável z. Para tanto, multiplica-se a segunda equação por 3 e a terceira por -2 e adicionam-se as duas para formar a nova linha 3. Logo:

$$L_3 \rightarrow -3L_2 - 2L_3$$

$$\begin{array}{c} 3L_2 : 6y - 21z = -51 \\ -2L_3 : -6y + 22z = 54 \\ \hline 3L_2 + L_3 : z = 3 \end{array}$$

Obtem-se, então, o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ z = 3 \end{cases}$$

Então, z = 3. Para determinar y, basta substituir o valor de z na segunda equação, então:

$$2y - 7(3) = -17 \Rightarrow y = 2$$

E substituindo y e z na equação 1, tem-se que:

$$x + (2) + 2(3) = 9 \Rightarrow x = 1$$

Logo, a solução do sistema é x = 1, y = 2 e z = 3 que, neste caso, é única.

Método de Gauss-Jordan

O método de Gauss-Jordan se utiliza de uma resolução matricial para o sistema de equações lineares. Para tanto cada linha da matriz corresponde a uma das equações. Logo, para um sistema de três equações e três incógnitas, tem-se uma matriz de três linhas e quatro colunas, pois as três primeiras colunas correspondem aos coeficientes de cada variável e a última ao valor independente.

Considerando o sistema de equações linares:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$$

A matriz associada ao sistema, também chamada de matriz aumentada, é a seguinte:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A matriz dos coeficientes do sistema, diferente da matriz aumentada acima, é a que se segue:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

As duas matrizes acima serão utilizadas na sequência. O processo é semelhante ao já feito na seção anterior. Na realidade, a intenção é de manipular as linhas da matriz, exatamente como no exemplo anterior.

Inicialmente, modifica-se a segunda linha. A intenção é de se obter um zero no elemento a_{21} da matriz. Para isso, multiplica-se a primeira linha por -3 e soma-se a 2 vezes a linha 2 ($L_2 \rightarrow -3L_1 + 2L_2$). Logo, a matriz aumentada é reescrita:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Note que essa manipulação modificou apenas a segunda linha, e essa é apenas uma forma de reescrever a matriz, de tal forma que os resultados continuam sempre os mesmos.

Na sequência, a intenção é que o elemento a_{31} também se torne zero. Logo, multiplica-se a primeira linha por -5 e soma-se a duas vezes a terceira linha para modificar esta última ($L_3 \rightarrow -5L_1 + 2L_3$)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 3 & 16 & -42 \end{pmatrix}$$

Dando continuidade, agora o objetivo vai ser de "zerar" o elemento a_{32}. Para tanto, multiplica-se a segunda linha por -3 e soma-se à terceira linha, modificando, mais uma vez, a linha 3 ($L_3 \rightarrow -3L_2 + L_3$)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & -14 & 42 \end{pmatrix}$$

Fazendo $L_3 \rightarrow \frac{L_3}{(-14)}$ tem-se que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

A partir daí, conclui-se que z = –3 e assim, pode-se determinar x e y, como no tópico anterior, mas pode-se operar a matriz até o fim e obter o resultado lendo suas linhas da seguinte maneira: o elemento a_{33} da matriz é o coeficiente z, que vale 1. Uma entrada que vale 1 e tal que todas as entradas à sua esquerda são nulas é chamada pivô. Operando o pivô, pode-se zerar os elementos a_{23} e a_{13} que são os coeficientes de z das duas primeiras equações.

Fazendo $L_2 \rightarrow -10L_3 + L_2$, modifica-se a linha 2 para:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Na sequência, faz-se $L_1 \rightarrow 2L_3 + L_1$, e obtém-se:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Como o objetivo de tornar o elemento $a_{12} = 0$, faz-se $L_1 \rightarrow -L_2 + L_1$, e:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

O elemento $a_{11} = 2$ e, portanto, não é um pivô. Para transformá-lo em um pivô, basta dividir a primeira linha por 2 e logo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Pode-se agora ler diretamente na matriz as soluções do sistema original: x = 1, y = 2 e z = -3.

Em resumo, para o método de Gauss-Jordan, podem-se efetuar em uma matriz as seguintes manipulações para torná-la na forma escalonada reduzida por linhas:

1. Trocar as linhas da matriz;
2. Multiplicar as entradas de uma linha por uma constante não nula;
3. Substituir uma linha por ela multiplicada por uma constante mais uma outra linha multiplicada por outra constante.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1.Determine os valores de x, y, z e w para que a seguinte igualdade de matrizes $\begin{pmatrix} x+2y & z+w \\ 2x-y & z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ seja satisfeita.

2.Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ determine:

a) A + B; b) 2A – 4B; c) 2B; d) AB; e) BA;

f) A^tB^t; g) $(AB)^t$;

3. Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 7 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ determine:

a) 2A + 3B; b) AC – BC.

4. Determine a inversa das seguintes matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

5. Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

6. Os sistemas $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ e $\begin{cases} ax+2y=10 \\ 3x-by=20 \end{cases}$ são equivalentes. Calcule a e b.

7. Resolva os seguintes sistemas lineares:

a) $\begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ 3x+3y-4z=7 \\ 5x+3y-4z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-3z=6 \\ 2x-y+4z=2 \\ 4x+3y-2z=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+8z=4 \\ 3x+2y+17z=1 \end{cases}$

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S.I.R.; RIBEIRO, V. L. WETZLER, H.G.. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harper-Row.

GUIDORIZZI, H.L.. **Um Curso de Cálculo**. 5ª ed. Vol 1. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

IEZZI, G.; DOLCE, O. e MURAKAMI, C.. **Fundamentos da Matemática Elementar: Logaritmos.** 10ª ed. Vol 2. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G. e HAZZAN, S.. **Fundamentos da Matemática Elementar: Sequênciais, matrizes, determinantes, sistemas.** 8ª ed. Vol 4. São Paulo: Atual, 2012

IEZZI, G. e MURAKAMI, C.. **Fundamentos da Matemática Elementar: Conjuntos e funções.** 9ª ed. Vol 1. São Paulo: Atual, 2013.

LIPSCHUTZ, S.. **Álgebra Linear.** In.: Coleção Schaum. McGraw-Hill. Rio de Janeiro: 1968.

MACHADO, A.S.. **Matemática Temas e Metas.** Vol 1. São Paulo: Atual, 1988.

EDITORA

EDUFERSA - Editora da Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Campus Leste da UFERSA
Av. Francisco Mota, 572 - Bairro Costa e Silva
Mossoró-RN | CEP: 59.625-900
edufersa@ufersa.edu.br

IMPRESSÃO

Imprima Soluções Gráfica Ltda/ME
Rua Capitão Lima, 170 - Santo Amaro
Recife-PE | CEP: 50040-080
Telefone: (91) 3061 6411

COMPOSIÇÃO

Formato: 21cm x 29,7cm
Capa: Couchê, plastificada, alceado e grampeado
Papel: Couchê liso
Número de páginas: 112
Tiragem: 400

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-63145-35-2
9 788563 145352

UNIVERSIDADE FEDERAL
UFERSA
RURAL DO SEMI-ÁRIDO

NEaD
núcleo de educação a distância

PROGRAD
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO

Ministério da Educação

CAPES

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA