Ensino de matemática:

CONVERSAS DIDÁTICAS A PARTIR DE TRATADOS HISTÓRICOS

Ana Carolina Costa Pereira
Organizadora

EdUECE

Ensino de matemática:

CONVERSAS DIDÁTICAS A PARTIR DE TRATADOS HISTÓRICOS

Ana Carolina Costa Pereira
Organizadora

1ª EDIÇÃO
FORTALEZA - CE
2022

EdUECE

Ensino de matemática: conversas didáticas a partir de tratados históricos

Coordenação Editorial
Cleudene de Oliveira Aragão

Diagramação e Capa
Narcélio Lopes

Revisão de Texto
Autor

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Ensino de matemática [livro eletrônico] : conversas didáticas a partir de tratados históricos / Ana Carolina Costa Pereira, (org.). -- 1. ed. -- Fortaleza : Editora da UECE, 2022.
PDF

Vários autores.
Bibliografia.
ISBN 978-85-7826-842-8

1. Matemática - Estudo e ensino 2. Professores de matemática - Formação I. Pereira, Ana Carolina Costa.

22-114730 CDD-370.71

Índices para catálogo sistemático:

1. Professores de matemática : Formação : Educação 370.71

Eliete Marques da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9380

Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE
Av. Dr. Silas Munguba, 1700 – Campus do Itaperi – Reitoria – Fortaleza – Ceará
CEP: 60714-903 – Tel: (085) 3101-9893
www.uece.br/eduece – E-mail: eduece@uece.br

Editora filiada à
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

INTRODUÇÃO

De tempos em tempos o cenário de pesquisas científicas muda e com isso novas perspectivas são traçadas, direcionando assim tendências que produzem diferentes olhares para um mesmo objeto de estudo. Nesse movimento, a área de história da matemática perpassou por essas transformações, evidenciado mais intensivamente no Brasil a partir de discussões acadêmicas na década de 90 do século XX, acarretando o nascimento do Seminário Nacional e História da Matemática (SNHM), em 1995[1]. De fato, o SNHM impulsionou, nessas 14 edições, em seus 21 anos, 975 textos advindos de conferências, palestras, comunicações científicas e pôsteres publicados nos anais, e 114 livros de minicursos.

Esse evento deu início à discussão e publicização de pesquisas em história da matemática, o que impulsionou a criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), em 2001, institucionalizando assim uma área de conhecimento acadêmico brasileira.

A partir desses fatos, grupos de pesquisa instituídos em programas de pós-graduação brasileiros que acolhem mestrado,

1 Para maiores detalhes, vide CALABRIA, A. R.; NOBRE, S. R. Sociedade brasileira de história da matemática uma história de sua criação e as contribuições ao desenvolvimento da área de pesquisa em história da matemática no Brasil. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 20, n. 40, p. 8-31, 2020.

doutorado e/ou pós-doutorado se aventuraram a pesquisar temáticas vinculadas à área da história da matemática, o que aumentou demasiadamente a produção de textos. Em uma busca rápida no Diretório dos Grupos de Pesquisa no Brasil do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), colocando a palavra-chave exata "história da matemática" e aplicando a busca nos campos, nome do grupo e nome da linha de pesquisa, pode-se encontrar 35 grupos de pesquisa cadastrado e autorizados.

É importante ressaltar que o primeiro grupo vinculado no CNPq foi o Grupo de Pesquisa em História da Matemática (GPHM), criado em 1995, liderado por Sergio Roberto Nobre e Marcos Vieira Teixeira, ambos docentes aposentados do departamento de matemática da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP). A partir do GPHM, outros grupos de pesquisas nasceram com a mesmo objetivo, o desenvolvimento teórico de assuntos ligados à pesquisa em história da matemática e sua relação com a educação matemática, liderados por membros que tiveram sua formação acadêmica, ou seja, mestrado, e/ou dentro do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, ligado ao GPHM.

Em uma dessas ramificações do GPHM encontra-se o Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM), criado em 2013, que é vinculado à Universidade Estadual do Ceará (UECE) e desenvolve trabalhos sobre as relações existentes entre a história da matemática, a educação matemática e a formação de professores.

O GPEHM absorve alunos da graduação, mestrado e doutorado de diversas instituições, em particular, os que desenvolvem estudos no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) e o Programa de Pós-graduação em Educação (PPGE) da Universidade Estadual do Ceará.

Essa parceria rendeu a primeira publicação do grupo intitulada *ENSINO E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA – Enfoques de* *uma Prática*, organizado pela Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira e publicado em 2020 em formado de e-book pela Editora da UECE. Esse livro traz "investigações desenvolvidas pelo GPEHM nos últimos seis anos, que são resultados de pesquisas provindas das dissertações defendidas"[2] na PGECM/IFCE nesse período.

Dessa forma, o livro aqui proposto é uma continuidade de divulgação dessa parceria entre o IFCE e a UECE, por meio do empenho de pesquisadores e discentes que compõem o GPEHM. Com o título *Conversas didáticas sobre o ensino de matemática a partir de elementos contidos em tratados históricos*, o foco continua sendo a incorporação da história no ensino da matemática a partir de recursos, em particular, tratados históricos matemáticos, voltado principalmente para a formação de professores. Essa temática é dialogada em onze capítulos.

O **primeiro capítulo,** intitulado "*Os círculos de proporção (1633) em propostas de atividades para a formação do professor de matemática*", de autoria de Verusca Batista Alves, têm como objetivo apresentar duas propostas de atividades baseadas nos estudos sobre a interface entre a história e o ensino de matemática associadas à formação de professores. As atividades abrangem os seguintes elementos históricos: o tratado *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment*, de 1633, do inglês William Oughtred (1574-1660), e o instrumento círculos de proporção inserido nesse tratado. A proposta permite que o professor de matemática amplie sua formação tanto em relação aos elementos relacionados à história da matemática quanto na ressignificação de conceitos matemáticos já estabelecidos por ele.

O **segundo capítulo**, da autora Andressa Gomes dos Santos, "*Mobilizando o conhecimento de progressão geométrica e logaritmos por meio de atividades com a escala dos números*", propõe desenvolver atividades didáticas que mobilizem conhecimentos sobre progressão geométrica e logaritmos por meio da manipu-

2 Pereira, A. C. C. Introdução. In. Pereira, A. C. C. (org.). **Ensino e história da matemática:** enfoques de uma prática. Fortaleza: EdUECE, 2020, p. 7-11.

lação da escala dos números. Desse modo, são sugeridas algumas atividades com a escala dos números em relação à sua manipulação sobre a proporção contínua, com o propósito de mobilizar ideias sobre a reação entre progressão geométrica e logaritmos.

O **terceiro capítulo**, "*Uma proposta de atividade advinda do tratado L'usage du Compas de Proportion de Didier Henrion, um professor francês do século XVII*", de Thalya Cristiny de Sousa Massen, tem por objetivo criar uma proposta de atividade a partir do estudo das linhas de partes iguais descrita no tratado *L'usage du compas de proportion*, publicado em 1631 pelo professor e matemático francês Denis Henrion (~1580 – ~1632), na qual poderá fornecer aos licenciandos de matemática uma reflexão sobre o uso do compasso na educação básica. A metodologia utilizada para descrever e estudar o tratado foi a documental, por ser uma fonte primária ainda não analisada. E, em relação à proposta da atividade, foi desenvolvida visando a aprendizagem cooperativa, na qual potencializa o desenvolvimento dos participantes através da colaboração e interação entre os membros do grupo.

O **quarto capítulo**, "*Uma proposta de UBP fazendo uso da balhestilha em um passeio de veleiro em Fortaleza*", de Antonia Naiara de Sousa Batista, tem o intuito de propor uma Unidade Básica de Problematização (UBP) pautada no texto do uso da balhestilha contido na *Chronographia, Reportorio dos Tempos...* para o estudo de conceitos matemáticos. Assim, no decorrer do capítulo, a autora expõe um pouco do contexto histórico do documento original *Chronographia, Reportorio dos Tempos...* e da balhestilha como uma forma de dar suporte à construção da UBP para a mobilização de conhecimentos geométricos e de medida. E por fim, tem-se algumas considerações a respeito do uso desses instrumentos atrelados a uma problemática investigativa como suporte para a formação de professores.

O **quinto capítulo**, "*Uma discussão inicial sobre a construção do Staffe de John Davis (1594) para o ensino de geometria*", de Raniele Sampaio Nogueira, apresenta o instrumento *staffe*, usado na navegação do século XVI e elaborado por John Davis, bem como sua construção, contendo elementos geométricos para uma possível aplicação em sala de aula a partir de um tratamento didático e estruturação de sequências didáticas. Assim, o instrumento apresentado possui noções geométricas em sua construção, podendo reconfigurar conceitos matemáticos e contribuir para uma aproximação entre a história da matemática e o ensino.

No **sexto capítulo**, *"O clássico problema da trissecção de um ângulo presente na construção do instrumento náutico jacente no plano"*, de Francisco Wagner Soares Oliveira, o autor assume o compromisso com esse anseio e dedica-se em particular a propor atividades que abordem conceitos matemáticos mobilizados no clássico problema da trissecção de ângulo qualquer. Nessa direção, toma-se como ponto de partida o instrumento náutico jacente no plano que está inserido na obra *De arte atque ratione navigandi* (1573). Três atividades que congregam tanto informações de caráter histórico como também outras relacionadas à possibilidade de trabalho na sala de aula de matemática são expostas.

O **sétimo capítulo**, "*O instrumento astrolábio náutico contido no tratado Arte de Navegar (1606) de Simão d'Oliveira utilizado para o ensino de geometria*", de Rebeca Oliveira Amarante, tem o intuito de propor uma atividade prática para o ensino de conceitos geométricos. Deste modo, no decorrer do capítulo há uma breve contextualização histórica do documento original *Arte de Navegar* (1606) e do astrolábio náutico, que dará suporte para a mobilização dos conhecimentos matemáticos. E, por fim, descreve-se a atividade a ser desenvolvida para a adequada mobilização dos conhecimentos geométricos incorporados a partir do uso do instrumento, para que o professor de matemática possa direcionar aos discentes uma melhor compreensão desse conteúdo.

No **oitavo capítulo,** "*A constituição de sequências didáticas face à articulação entre história da matemática e tecnologias digitais para a formação de professores de matemática*", as autoras Gisele Pereira Oliveira e Ana Carolina Costa Pereira têm por objetivo produzir sequências didáticas para o ensino de aritmética e geometria a partir do contexto histórico presente na *A arte de Navegar*, de Simão d'Oliveira (1606), para a formação de professores de matemática. O percurso metodológico foi amparado em uma abordagem qualitativa, com a utilização da metodologia Sequência Fedathi, constituindo atividade didática, mediante o uso de sequências que destacaram orientações quanto à tomada de posição, maturação, solução e prova. Entre os resultados visualizados, observou-se a necessidade do tripé planejamento, recursos e metodologias para uma transposição didática de elementos históricos visto no documento estudado e no instrumento matemático quadrante náutico selecionado para o ensino, tal como na articulação entre história da matemática e tecnologias digitais.

O **nono capítulo**, "*O tratado Lilavati (1150) para o ensino de multiplicação*", de Dianara Figueirêdo Freire e Thalya Cristiny de Sousa Masseno, discute os métodos de multiplicação proposto por Bhaskara II em seu tratado *Lilavati* (1150), propondo atividades para o ensino de multiplicação. No que se refere à metodologia, fizemos uma pesquisa qualitativa, de caráter documental. Assim, chegamos à conclusão de que Bhaskara II propõe cinco regras para resolver a multiplicação que podem ser exploradas por professores na sala de aula por meio das atividades propostas nesse trabalho.

O **décimo capítulo**, "*Uma proposta de atividade a partir do tratado Haidao Suanjing para a formação de professores de matemática*", de Claudiana Oliveira de Sousa, é uma proposta de atividade sobre noções geométricas envolvendo o tratado *Haidao Suanjing*, do chinês Liu Hui (século III), para a formação de professores de matemática. Trata-se de um estudo bibliográfico e documental, com caráter qualitativo, sobre os aspectos matemáticos do problema cinco, que se refere a um edifício visualizado sobre uma montanha, e a partir dessa análise se visa conhecer as noções geométricas do *Haidao Suanjing*. Tal análise é relevante ao mostrar como os problemas envolvendo os conhecimentos geométricos são oriundos da prática, e como os problemas de medição eram resolvidos na China em torno do século III ao VII.

Por fim, o **décimo primeiro capítulo**, "*Uma investigação sobre os critérios para o uso de textos originais no ensino de matemática brasileiro*" da autora Isabelle Coelho da Silva é um recorte de uma pesquisa de mestrado, cujo objetivo foi investigar se essas propostas de articulação entre história e ensino de matemática a partir de textos originais utilizam algum critério para inserir esse material em sala de aula. Assim, visamos discorrer sobre alguns dos resultados encontrados em uma análise sobre teses e dissertações de três programas de pós-graduação, que foram defendidas entre 2008 e 2017. Para tanto, discorreremos sobre o processo de coleta de dados, assim como alguns dos resultados encontrados. Desta forma, mostramos que são poucos os critérios que essas publicações consideram em suas escritas. Portanto, ainda serão necessários diversos estudos a luz de critérios mais bem estabelecidos para que essas propostas cheguem ao educador matemático a fim de articular história e ensino de matemática.

Dessa forma, este livro apresenta a visão dos autores sobre orientações didáticas para o ensino de matemática a partir a incorporação de tratados históricos. Espera-se que a leitura dos capítulos possibilite conhecer mais sobre as produções envolvendo história da matemática de jovens pesquisadores e pesquisadoras do GPEHM, e comprovar suas qualidades.

Ana Carolina Costa Pereira

Sumário

CAPÍTULO 1

Os círculos de proporção (1633) em propostas de atividades para a formação do professor de matemática

Verusca Batista Alves

A história da matemática é um campo fértil e possível de realizar articulações com várias outras áreas. Nesse segmento, estudos[3] são desenvolvidos buscando construir interfaces entre a história da matemática com a educação matemática, visando promover reflexões, principalmente no que diz respeito aos processos de ensino e de aprendizagem.

Para além disso, a formação de professores também se destaca nessa articulação, pois a história da matemática se põe como elemento fundante da formação desse professor e pode auxiliar na construção da sua ação didática, seja sendo incorporada na educação básica, ou promovendo a ressignificação de conceitos do próprio professor.

Partindo então das possibilidades que a interface entre a história e ensino de matemática pode fornecer ao professor, estudos[4] vêm sendo realizados visando a investigação de antigos instrumentos matemáticos para a formação inicial ou continuada de professores. É nesse tema que discutiremos uma proposta nesse capítulo.

Assim, propõe-se nesse capítulo duas atividades didáticas que podem fornecer novos elementos sobre a história da matemá-

3 Brito (2016), Castillo e Saito (2016), D'Ambrosio (2013), Mendes (2015), Miguel *et al.* (2009), Silva e Pereira (2021) e Sousa (2016).

4 Saito e Pereira (2019), Alves (2019), Albuquerque (2019), Oliveira (2019), Saito (2019), Alves e Pereira (2020), Batista e Pereira (2020).

tica à formação dos professores de matemática, além de exercitar a significação de conceitos como logaritmos e proporcionalidade.

As atividades são baseadas no estudo de um instrumento denominado círculos de proporção, datado do século XVII, inserido em um tratado histórico intitulado *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment* (1633), de William Oughtred (1574-1660).

O conceito de proporcionalidade em *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment* de 1633

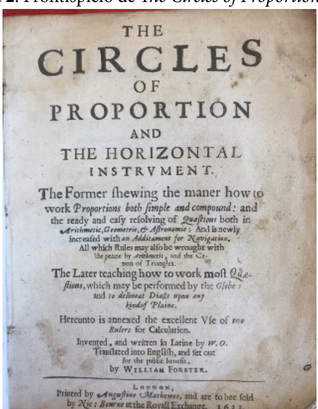
Os livros de história da matemática apontam que os séculos XVI e XVII foram períodos de intensas renovações das bases científicas. Esse ambiente que estava se moldando teve como um de seus aspectos a mudança de paradigmas e os estudiosos agora buscariam matematizar o conhecimento e realizar experiências. Nesse sentido, o interesse voltava-se para criticar velhas estruturas de conhecimento e propor novas tendências (SAITO, 2015).

Nesse caminhar, destaca-se a produção de tratados com os conhecimentos matemáticos do período que estavam associados a instrumentos matemáticos. Um deles é a obra de William Oughtred (1574-1660) (figura 1), intitulada *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment* (figura 2). Tal título recebeu sua primeira edição entre os anos de 1632 e 1633, tornando-se público aos londrinos.

Figura 1: William Oughtred

Fonte: Hopp (1999, p. 12)

Figura 2: Frontispício de *The Circles of Proportion*...1633


THE
CIRCLES
OF
PROPORTION
AND
THE HORIZONTAL
INSTRVMENT.
The Former ſhewing the maner how to work *Proportions both ſimple and compound*: and the ready and eaſy reſolving of *Quæſtions* both in *Arithmetic, Geometrie, & Aſtronomie*: And is newly increaſed with *an Additament for Navigation*.
All which Rules may alſo be wrought with the penne by *Arithmetic*, and the Canon of Triangles.
The Later teaching how to work moſt *Quæſtions*, which may be performed by the *Globe*: and *to delineat Dialls upon any kind of Plaine*.
Hereunto is annexed the excellent Vſe of *two Rulers* for Calculation.
Invented, and written in Latine by *W. O.*
Tranſlated into Engliſh, and ſet out for the public benefit,
by WILLIAM FORSTER.

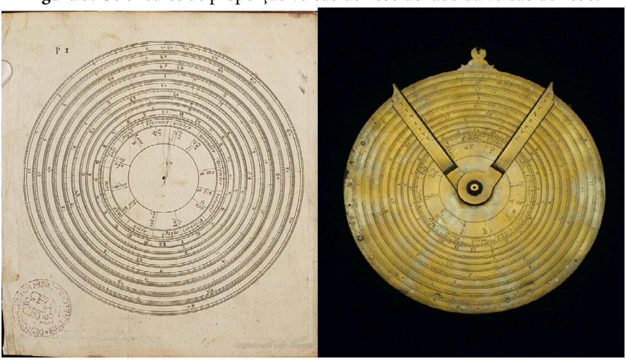
LONDON,
Printed by *Augustine Mathewes*, and are to bee ſold by *Nic: Bourne* at the Royall Exchange. 1633.

Fonte: Oughtred (1633, frontispício)

Como já existem bons textos que tratam sobre a biografia de William Oughtred[5], assim como sua obra[6], não será foco deste capítulo apresentar tais pontos. Esta seção foca principalmente o conteúdo que aponta um dos capítulos de *The Circles of Proportion...* (1633), cujo tema é voltado ao conhecimento sobre a quarta proporcional.

William Oughtred, como autor de livros, buscou dispor seu conhecimento e contribuir para a construção de conhecimentos matemáticos. Nesse sentido, o seu tratado, *The Circles of Proportion ...*, de 1633, é organizado em duas partes, sendo que na primeira há 14 capítulos com os mais diversos temas, e a segunda parte lista 30 tópicos que tratam de questões relativas ao Globo. Além disso, esse tratado discute um instrumento matemático chamado de círculos de proporção (OUGHTRED, 1633). A figura 3 indica, à esquerda, a imagem contida em Oughtred (1633) do instrumento e à direita, uma versão física do objeto catalogada no National Museum of Scotland.

Figura 3: Os círculos de proporção versão de 1633 ao lado da versão de 1650.



Fonte: Oughtred (1633, p. PI) e National Museum of Scotland (2021).

5 Para conhecer mais sobre William Oughtred, vide Cajori (1916).

6 Vide Alves (2019).

Um dos temas principais abordados por Oughtred (1633) em seu texto é a ideia de *Proporção Recíproca* e *Proporção Direta*. No texto do capítulo 1 ele já indica que irá realizar o "[...] trabalho de proporções simples e compostas, e para a pronta e fácil resolução de questões tanto na Aritmética, Geometria e Astronomia, por cálculo" (OUGHTRED, 1633, p. 01, tradução nossa). Tais conhecimentos são a base para o estudo dos demais capítulos de sua obra, visto que a maioria pode ser realizada através do cálculo da chamada quarta proporcional.

No entanto, antes de abordar a proporção, Oughtred (1633), no capítulo 1[7], apresenta os círculos de proporção. O instrumento é composto por vários círculos concêntricos e tem dois indicadores que são utilizados durante o seu manuseio.

Só após, em seu capítulo 2, intitulado *da operação da regra da proporção e também da multiplicação e divisão*, Oughtred (1633) apresenta a noção de proporção. O capítulo 2 é organizado em dois teoremas, indicação de manuseio do instrumento círculos de proporção e na apresentação de exemplos das ideias relativas ao que ele chama de *Proporção Recíproca* e *Proporção Direta*, assim como sobre as operações de multiplicação e divisão.

Alves (2019) aponta que William Oughtred tinha uma visão bem definida sobre a utilização de instrumentos para a realização de cálculos. Conforme explica a autora, ele defendia primeiramente a compreensão "das Artes" para então se seguir à manipulação de objetos. Assim, na organização de seu texto, antes de ensinar a manusear o instrumento, ele apresenta as noções e teoremas matemáticos que precisam ser dominados para os cálculos necessários nos demais capítulos.

Diante disso, encontra-se no capítulo 2 de Oughtred (1633) uma interessante possibilidade de se conhecer o conceito de pro-

7 O texto dos capítulos 1 e 2 de Oughtred (1633) podem ser consultados na seção de atividades propostas neste capítulo.

porção tratado no século XVII, associado ao estudo e manuseio de instrumentos que foram importantes nesse período. Isso fornece ao professor de matemática, seja no âmbito de formação inicial ou continuada, novos conhecimentos a respeito da própria história da matemática, que é um elemento básico e importante na sua formação profissional.

Tomando como base o contexto histórico, o instrumento e o tratado, é possível elaborar várias ações para a formação do professor de matemática. Assim, na seção seguinte, são propostas duas atividades que podem auxiliar na formação do professor de matemática e promover a disseminação da história da matemática como elemento para a ação didática na educação básica.

Atividades didáticas para o professor de matemática

A partir da história da matemática, surgem diversos elementos que podem ser considerados potencialmente didáticos para o ensino de matemática. No entanto, para que isso seja possível, é importante destacar a formação do professor de matemática sobre os conhecimentos a respeito da história da matemática.

Nesse sentido, alguns autores[8] delineiam propostas para a formação do professor, tomando a história da matemática como parte fundamental da formação geral. Desse modo, partindo desse segmento, propomos aqui uma série de atividades que podem ser desenvolvidas na formação do professor de matemática, partindo do estudo de capítulos do tratado de Oughtred (1633).

É importante ressaltar que para uma atividade com base em elementos históricos de matemática possa ser bem desenvolvida, alguns pontos merecem atenção no momento de sua elaboração. Dentre eles, ressaltamos **o tratamento didático** do material utilizado, que consiste em tratar didaticamente o texto que será utili-

---

8 Para propostas no mesmo segmento, vide: Alves (2019), Alves e Pereira (2020), Albuquerque (2019), Oliveira (2019) e Saito (2019). Além dos textos de demais capítulos deste livro.

zado, sem, no entanto, descaracterizá-lo (SAITO; PEREIRA, 2019; ALVES, 2019). Assim, no caso das atividades propostas a seguir, um importante tratamento a ser realizado foi a tradução do texto para o idioma português brasileiro.

Um segundo ponto a se considerar é a **intencionalidade da atividade e o plano de ação**, que são para toda e qualquer atividade didática os elementos mais importantes para a sua condução. Segundo Alves (2019, p. 88), este ponto

> tem seu olhar voltado aos propósitos do processo de ensino da atividade, que está diretamente relacionado à organização de como ela será realizada e as potencialidades didáticas pertinentes. Com isso, deve-se estabelecer o objetivo e definir quais os detalhes referentes à aplicação da atividade, tais como, o tipo - uma aula, oficina ou minicurso; o tempo; o local; o público-alvo, dentre outros de ordem organizacional.

No caso das propostas de atividade a seguir, tem-se como objetivo principal a ressignificação de conceitos como proporcionalidade e logaritmos, além da formação do professor de matemática para o uso de recursos provenientes da história.

Por fim, a etapa final é o **desenvolvimento da atividade,** que segue o modo organizacional da execução da atividade. Ressalta-se que no caso de uma atividade em que há uma comunicação direta entre professor e aluno, o método a ser utilizado para o desenvolvimento fica a cargo do professor. Para o desenvolvimento das atividades a seguir, propõe-se ao leitor principalmente a produção escrita de suas questões. Isso porque através da expressão escrita, diversos elementos e conhecimentos matemáticos podem surgir e complementar o aprendizado e as possíveis ressignificações.

Atividade 1 – Construindo os círculos de proporção

QUADRO INFORMATIVO GERAL
Resumo Esta atividade consiste na reconstrução de duas ou mais escalas presentes nos círculos de proporção, visando principalmente a formação do professor de matemática em alguns elementos da história da matemática.
Quais conhecimentos serão necessários? Elementos de geometria como: ponto, reta, segmento de reta, distância angular e circunferência. Noções de logaritmo decimal, característica e mantissa. Conhecimentos básicos sobre o *software* GeoGebra.
Qual o objetivo desta atividade? Reconstruir duas ou mais escalas dos círculos de proporção indicadas pelo texto histórico. Compreender/Estabelecer as relações entre temas algébricos e geométricos. Ressignificar alguns conteúdos matemáticos.
Que materiais irei precisar? Um computador com o *software* GeoGebra e acesso à internet, capítulo 01 de Oughtred (1633) (quadro 1), texto com alguns procedimentos indicativos e material para anotações.

O instrumento círculos de proporção, datado do século XVII, tem sua criação vinculada à William Oughtred (1574-1660), de acordo com textos tradicionais de história da matemática. O objeto está descrito no primeiro capítulo do tratado *The Circles of Proportion...*, que traz também uma imagem do instrumento. Essa atividade está organizada em duas partes: na primeira, o leitor irá conhecer os círculos de proporção e na segunda, irá realizar a construção com o auxílio de um *software*.

Parte 1 – Conhecendo os círculos de proporção

A primeira parte da atividade consiste em conhecer o instrumento círculos de proporção, como forma de fornecer/complementar ao professor de matemática uma formação sobre história da matemática. Nesse sentido,

1. Indica-se que seja realizada a leitura do texto do capítulo 1, disposto no quadro 1 a seguir.

Quadro 1: Texto de recurso 1

DA DESCRIÇÃO DOS CÍRCULOS DE PROPORÇÃO

1. Existem vários tipos de círculos, divididos depois de várias maneiras, junto com um indicador a ser aberto depois, à maneira de um par de compassos.
2. O primeiro, ou círculo mais externo é de senos, de 5 graus e 45 minutos aproximadamente, até quase 90 graus.
3. O segundo círculo é de tangentes de 5 graus e 45 minutos aproximadamente, até 45 graus.
4. O terceiro círculo é de tangentes de 45 graus até 84 graus e 15 minutos.
5. O sexto círculo é de tangentes de 84 graus até aproximadamente 89 graus e 25 minutos.
O sétimo círculo é de tangentes de aproximadamente 35 minutos até 6 graus.
O oitavo círculo é de senos de aproximadamente 35 minutos até 6 graus.
6. O quarto círculo é de Números Desiguais, que são anotados com os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1. Quer você os compreenda como números únicos, dezenas, centenas ou milhares, etc.
7. O quinto círculo é de Números Iguais, que são anotados com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.
Este quinto círculo é raro de qualquer uso, mas [é] somente por meio dele, [que] a distância dada de números pode ser multiplicada ou dividida, conforme necessário.
A razão no qual [a] operação é, [dá-se] porque este quinto círculo mostra os Logaritmos dos números. Pois, se o indicador for aplicado a qualquer número no quarto círculo, ele será, no quinto círculo, cortado no Logaritmo do mesmo número, de modo que, ao logaritmo encontrado você prefixa uma característica (como o Mestre Briggs o denomina) [que é] o número dos lugares dos inteiros propostos (que você pode preferir chamar de número Gradual). Assim, o logaritmo do número 2 será encontrado 0,30103. E o logaritmo do número 43,6 será encontrado 1,63949.
Os números são multiplicados pela adição de seus logaritmos; e eles são divididos pela subtração de seus logaritmos.
8. A linha direita passando pelo Centro, em 90 e 45 [graus], eu chamo a Linha da Unidade, ou do Raio.
9. Aquele Braço do Indicador que em cada Operação é colocado no antecedente, ou primeiro termo, eu chamo de Braço Antecedente; e aquele que é colocado no termo consequente, eu chamo de Braço Consequente.

Fonte: Oughtred (1633, p. 1, tradução nossa)

2. Em seguida, refaça a leitura acompanhando a figura.

Você pode consultar a imagem mais ampla e nítida através dos seguintes links:

- https://www.researchgate.net/figure/Figura-7-Circulos-de-proporcao-1633_fig4_340661835
- https://www.nms.ac.uk/media/1005532/t1972252-sundial_700x835.jpg

3. A partir da leitura, reflita sobre alguns questionamentos:

- Quais os conhecimentos matemáticos estão presentes na descrição do instrumento?
- Por que há dois círculos de seno e quatro para tangentes e não somente um para cada?
- Existe alguma relação entre as escalas graduadas?
- Por que não há círculo(s) graduado(s) com escalas de cosseno?
- Qual a relação com os logaritmos?
- Qual o significado matemático dos números iguais e dos números desiguais indicados no texto?
- Que relações matemáticas são possíveis de estabelecer a partir da leitura?

Parte 2 – Reconstruindo as escalas

A segunda parte da atividade propõe a reconstrução das escalas dos círculos de proporção através do *software* GeoGebra. Para isso, deve-se ter em mente a disposição e compreensão das escalas discutidas na primeira parte.

1. Faça a leitura do texto disponível em: http://rhmp.com.br/index/index.php/rhmp/article/view/69
2. Refaça, com base nas instruções do texto, a reconstrução das escalas indicadas dos círculos de proporção.
3. A partir da realização da atividade, reflita sobre alguns questionamentos:

- Quais os conhecimentos matemáticos estão presentes na construção das duas escalas do instrumento?
- Qual a função dos logaritmos na construção?
- Que relações entre conhecimentos matemáticos podem ser estabelecidas?

DESAFIO!

A partir da reconstrução dos círculos 4 e 5, tente construir os demais utilizando seus conhecimentos geométricos e algébricos.

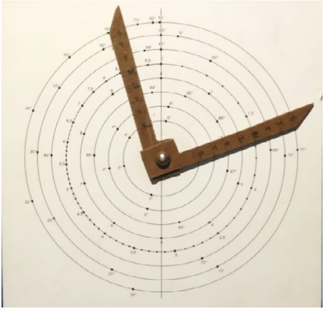
Manuseando os círculos de proporção

QUADRO INFORMATIVO GERAL
Resumo Esta atividade consiste na manipulação do instrumento círculos de proporção a partir da leitura do texto histórico, visando principalmente a formação do professor de matemática em alguns elementos da história da matemática.
Quais conhecimentos serão necessários? Noções sobre as operações de multiplicação, divisão e proporção. Produto e quociente de logaritmos.
Qual o objetivo desta atividade? Mobilizar conhecimentos matemáticos para o manuseio do instrumento. Estabelecer relação entre a proporção e os logaritmos.
Que materiais irei precisar? O capítulo 02 de Oughtred (1633) (quadro 2) e o instrumento físico.

O desenvolvimento do manuseio requer a sua versão física. Por isso, indicamos que se faça a impressão da construção e que esta seja colada em um material mais sólido. Para obter uma versão para impressão, acesse o link <https://www.researchgate.net/figure/Circulos-de-Proporcao-no-GeoGebra_fig14_340661835>. Os ponteiros podem ser feitos com folhas mais grossas, com a finalidade de serem movimentados de modo mais preciso.

Para fins ilustrativos, apresentamos também a figura 4 a seguir, que mostra uma reconstrução feita por Alves (2019), que refez as oito escalas no *software* GeoGebra e colou em uma base quadrada de madeira com tamanho 25cm. Além disso, os ponteiros foram presos com o uso de um parafuso que permitisse girá-los. O tamanho fica a critério do leitor, mas deve permitir uma boa visualização das escalas.

Figura 4: Reconstrução dos círculos de proporção.



Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Parte 1 – Manuseando o instrumento

1. Inicialmente, de posse do objeto, indicamos o manuseio livre. Trata-se de uma ação inicial que tem por objetivo a primeira experiência com o objeto e os primeiros levantamentos cognitivos/hipóteses que acontecerão a partir dessa manipulação. Durante o manuseio livre do instrumento, indica-se que se busque as características matemáticas que possam estar associadas a esse manuseio. Perguntas como: Do que tratam essas escalas? Para que servem? Qual a função de cada escala? Por que há dois ponteiros? – são interessantes nesse momento.
2. Faça a leitura do que trata o capítulo 2 de Oughtred (1633) (quadro 2).

Quadro 2: Texto de recurso 2

DO MANUSEIO E REGRAS DE PROPORÇÃO

Teorema: Se de três números dados, o primeiro divide o segundo e o quociente multiplica o terceiro, o produto deverá ser o quarto proporcional aos três números dados.
Teorema: Se de três números dados, o segundo divide o primeiro, e o quociente divide o terceiro, este último quociente deverá ser o quarto proporcional aos três números dados.
Também não é importante se os dois números após o primeiro forem segundo ou o terceiro.
E note na *Proporção Recíproca*, aquele termo pelo qual a pergunta é feita; mas, na *Proporção Direta*, o termo que é homogêneo a isso é o primeiro termo, ou o antecedente da primeira proporção.
E, portanto, a partir desses fundamentos assim estabelecidos, (se você corretamente conceber a natureza dos logaritmos), segue-se a descoberta do quarto proporcional por este instrumento, do qual esta é a regra.

Abra os braços do instrumento à distância do primeiro e do segundo número. Depois traga o braço antecedente, ou aquele que permaneceu sobre o primeiro número até o terceiro, e assim o braço consequente, mantendo a mesma abertura, mostrará o quarto número procurado.

[Os números são multiplicados pela adição de seus logaritmos; e eles são divididos pela subtração de seus logaritmos].

Em que, [a] operação dessas quatro coisas são minuciosamente consideradas:
Primeiro, em constituir **os lugares** de cada número no quarto círculo; se os algarismos escritos no espaço indicam **unidades, dezenas ou centenas etc.** Em segundo lugar, se aquele braço que mostra o quarto proporcional, ultrapassa **a linha do raio**; então você conta o quarto em um novo círculo ou grau. Em terceiro lugar, se o quarto número procurado deveria ser maior ou menor que o terceiro. Pois se um quarto número for oferecido maior que o terceiro, quando deveria ser menor, ou, menor que o terceiro quando deveria ser maior; é um sinal de que esse número pertence a um círculo de outro grau.
Em quarto lugar, olhamos qual a verdadeira distância entre o primeiro e o segundo, que o mesmo é suposto entre o terceiro e o quarto, e também na mesma parte. E por causa da *Multiplicação* e *Divisão*, temos [uma] certa proporção implícita. Falaremos dela em primeiro lugar.
Na multiplicação, como uma unidade é um dos fatores (de números serem multiplicados) assim é o outro como os fatores, para o produto.

$$1.5 :: 4.20$$

[Abra os braços do instrumento à distância do 1 e do 5. Depois traga o braço antecedente, ou aquele que permaneceu sobre o 1 até o 4, e assim o braço consequente, mantendo a mesma abertura, mostrará o quarto número procurado.]

E o produto de dois números terá tantos lugares como os dois fatores, quanto menos deles exceder tantos dos primeiros números do produto. Mas se não exceder, terá um a menos.
E na divisão, como o divisor é para uma unidade; assim é o dividendo, para o quociente.

$$5.1 :: 4.\frac{4}{5}$$

[Abra os braços do instrumento à distância do 5 e do 1. Depois traga o braço antecedente, ou aquele que permaneceu sobre o 5 até o 4, e assim o braço consequente, mantendo a mesma abertura, mostrará o quarto número procurado.]

E o quociente terá tantos lugares, como o dividendo tem mais que o divisor se o divisor exceder tantos [lugares] dos primeiros números do dividendo, mas se não exceder, terá um lugar a mais.
Portanto, tenha esta regra cuidadosamente em mente: que na multiplicação o primeiro termo da proporção implícita é sempre 1. E na divisão, o primeiro termo é o divisor.

Fonte: Oughtred (1633, p. 05, tradução nossa)

1. Feita a leitura, é interessante observar a indicação de como realizar o manuseio que Oughtred (1633) sugere e reproduzi-lo, buscando compreender as operações e conhecimentos matemáticos que são estabelecidos nessa ação.
2. Reflita a respeito das seguintes questões como:

- Quais os princípios matemáticos estão implicados?
- Em que momento eles aparecem?
- Quais conhecimentos matemáticos estão presentes no manuseio do instrumento?
- Que relações matemáticas são possíveis de estabelecer pelo manuseio?

Para complementar sua reflexão sobre o manuseio, deixo como proposta exercícios retirados também do tratado. Indica-se que primeiro busque resolvê-lo por meio do manuseio e em seguida observe a resposta sugerida por Oughtred (1633).

Exercício 1 - Quantos pés e partes decimais de um pé têm em 17,3 polegadas?[9]
Solução proposta:
Primeiro tire o pé inteiro que é de 12 polegadas, e lá permanecerá 5,3 polegadas, que sendo dividido por 12, você terá quase 442 mil partes. Portanto 17,3 polegadas é 1,442 pés. E ao contrário 1,442 pés, serão reduzidos em 17,3 polegadas, sendo multiplicados por 12.

Exercício 2 - O conteúdo de um vaso, sendo dado em polegadas cúbicas, ou em [partes] décimas cúbicas de um pé, para descobrir quantos galões ele contém. Isto é feito facilmente se você dividir o conteúdo dado em polegadas, por 272,25 para medida de cerveja inglesa e por 231, para medida de vinho. Mas se o conteúdo for dado em partes decimais de um pé, divida-o por 157,5521 para a medida de cerveja inglesa e por 133,6803 para a medida do vinho. Quantos galões de vinho estão em um vaso contendo 24839,56 polegadas cúbicas, ou 14374,746 partes cúbicas de um pé?[10]
Solução proposta:
Divida 24839,56 por 231 ou divida 14374,746 por 133,68 e o quociente será 107,53 galões de vinho.

9 Oughtred (1633, p. 42, tradução nossa)

10 Oughtred (1633, p. 58, tradução nossa)

A partir das duas propostas de atividade o leitor estará imerso em uma gama de conteúdos matemáticos que podem ser tomados como base em propostas de atividades escolares futuras, de acordo com o objeto de cada aula. Ressalta-se a importância de ter em mente aqueles aspectos citados no início da atividade – tratamento didático, intencionalidade e plano de ação e o desenvolvimento – que são elementos únicos para cada atividade em que não se pode considerar a produção de "receitas" para o ensino de matemática.

Apontamentos finais

A história da matemática como área de conhecimento fornece interessantes recursos que podem ser inseridos no âmbito da educação matemática. Uma das possibilidades está associada à própria formação de professores de matemática, seja na ampliação de conhecimentos sobre a história, ou na ressignificação de conceitos matemáticos.

Nesse sentido, atividades com viés histórico que possam ser executadas pelo professor de matemática podem auxiliar na formação desse professor, tanto no que diz respeito aos elementos de história da matemática, quanto na ressignificação de conhecimentos matemáticos já estabelecidos pelo professor.

As atividades propostas possibilitam mobilizar diversos conhecimentos matemáticos, dentre eles principalmente a noção de proporção, discutida pelos teoremas indicados no tratado que é conteúdo basilar para outras associações, tais como conceitos de logaritmos e suas propriedades, operações de multiplicação de divisão e elementos de geometria.

Assim, espera-se que esse material seja fonte de estudos futuros para o professor que deseje ampliar seus conhecimentos sobre a história da matemática, assim como possa servir de inspiração para a ressignificação de sua ação na educação básica.

Referências

ALBUQUERQUE, S. M. de. **Um estudo sobre a articulação entre a multiplicação contida no Traité de Gerbert (1843) e o ensino na formação de professores de matemática**. 2019. 145 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

ALVES, V. B. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento círculos de proporção de William Oughtred**. 2019. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

ALVES, V. B.; PEREIRA, A. C. C. Seno, cosseno e tangente: uma atividade com os círculos de proporção de William Oughtred (1633) na formação de professores de matemática. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém, v. 16, n. 35, p. 74-88, abr. 2020. ISSN 2317-5125.

BATISTA, A. N. de S.; PEREIRA, A. C. C. A balhestilha (1603) como um instrumento matemático para o estudo de medidas na formação de professores de matemática. **Acta Scientiarum. Education, Maringá**, v. 43, p. 1-12, 23 nov. 2020. Universidade Estadual de Maringa.

BRITO, A. J. Uma abordagem alternativa para o ensino de logaritmos: relações com PA e PG. In: BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F.; TRINDADE, L. S. P. (Org.). **História da ciência**: tópicos atuais 4. São Paulo: Livraria da Física, 2016. p. 11-32.

CAJORI, F. **William Oughtred:** a great seventeenth-century teacher of mathematics. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1916.

CASTILLO, A. R. M.; SAITO, F. Algumas considerações sobre o uso do báculo (baculum) na elaboração de atividades que articulam história e ensino de Matemática. In: FLORES SALAZAR, J.; UGARTE GUERRA, F. (eds.). **Investigaciones en Educación Matemática**. Lima: Fondo Editorial PUCP, 2016. p. 237-251.

D'AMBROSIO, U. Por que e como ensinar história da matemática. **REMATEC**, v. 12, p. 7-21, 2013.

HOPP, P. M. **Slide Rules:** Their History, Models, and Makers. New Jersey: Astragal Press, 1999.

MENDES, I. A. **História da Matemática no Ensino:** Entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Livraria da Física, 2015. (História da Matemática para Professores).

MIGUEL, A. et. al. **História da matemática em atividades didáticas**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

NATIONAL MUSEUM OF SCOTLAND. **Calculating instrument, Sundial instrument, Double horizontal dial, Circles of proportion**. 2021.

OLIVEIRA, F. W. S. **Sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578) na formação do professor de Matemática**. 2019. 200f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

OUGHTRED, W. **The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment.** London: Augustine Mathewes, 1633.

SAITO, F. A reconstrução de antigos instrumentos matemáticos dirigida para a formação de professores. **Educação:** Teoria e Prática, Rio Claro, v. 29, n. 62, p. 571-589, set/dez, 2019.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re) construções contextuais.** São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SAITO, F; PEREIRA, A. C. C. **A elaboração de atividades com um antigo instrumento matemático na interface entre história e ensino**. São Paulo: Livraria da Física, 2019. (Série história da matemática e da educação matemática para o ensino; volume 2).

SILVA, I. C. da; PEREIRA, A. C. C. Definições e Critérios para o Uso de Textos Originais na Articulação entre História e Ensino de Matemática. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 35, n. 69, p. 223-241, jan. 2021. FapUNIFESP (SciELO).

SOUSA, G. C. de. História da Matemática e Tecnologias de Informação e da Comunicação. In: PEREIRA, A. C. C.; ALVES, F. R. V. (Org.). **Ciências e Matemática**: investigações no ensino. Curitiba: CRV, 2016. p. 51-66.

CAPÍTULO 2

Mobilizando o conhecimento de progressão geométrica e logaritmos por meio de atividades com a escala dos números

Andressa Gomes dos Santos

A história da matemática é destaque em diversas pesquisas que buscam opções didáticas para o ensino de matemática, como os estudos de Batista e Pereira (2017), Alves e Pereira (2018), Pereira e Saito (2019) e Santos, Oliveira e Pereira (2020), que consideraram um recurso potencialmente didático advindo da história.

Nessa perspectiva, essas pesquisas utilizaram textos históricos e instrumentos que tivessem algum potencial para o ensino de matemática[11]. Assim, esses recursos podem ser levados à formação de professores por meio da construção de uma interface entre história e ensino de matemática.

A construção da interface adotada nesse estudo está pautada na ideia desenvolvida por Saito e Dias (2013), que considera a elaboração do conhecimento matemático por intermédio de reflexões para a construção de atividades didáticas.

Para isso, é preciso fazer um estudo contextual do material histórico escolhido, assim como uma análise epistemológica e historiográfica[12]. Este estudo se ampara nesse viés de aliança entre história e ensino.

Assim, por meio de critérios elencados por Silva e Pereira (2021), escolheu-se o tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments, for such as are studious*

11 Sobre recursos provenientes da história vide Saito (2015).

12 Para a análise do documento histórico é preciso fazer um estudo em três esferas: contextual, historiográfica e epistemológica (ALFONSO-GOLDFARB, 2008).

of Mathematicall practise, datado de 1623, de autoria de Edmund Gunter (1581 – 1626). Especificamente, selecionou-se para a construção de atividades, a escala dos números apresentada nesse documento.

Desse modo, este estudo tem como objetivo desenvolver atividades didáticas que mobilizem conhecimentos sobre progressão geométrica e logaritmos por meio da manipulação da escala dos números.

O artigo se caracteriza como uma pesquisa documental que faz uso de "[...] documentos que não sofreram tratamento analítico, ou seja, que não foram analisados ou sistematizados" (KRIPKA; SCHELLER; BONOTTO, 2015, p. 57).

Em relação às propostas, elas se caracterizam como um "[...] conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos" (ZABALA, 1998, p. 18).

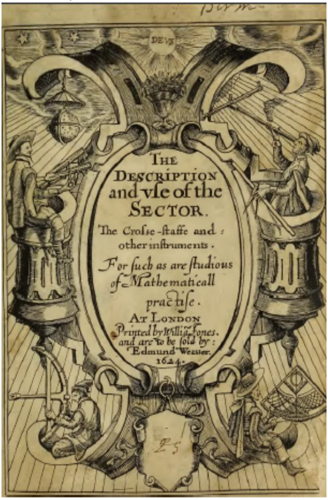
Dessa forma, o estudo está dividido em quatro partes: a primeira apresenta um panorama do contexto de elaboração da escala dos números desenvolvida por Edmund Gunter, a segunda parte foca o manuseio da escala em relação à proporção contínua, a terceira apresenta as orientações de atividades por intermédio do recurso histórico e, por fim, a quarta expõe as conclusões.

A escala dos números desenvolvida por Edmund Gunter

A escala dos números adotada nesse estudo foi desenvolvida por Edmund Gunter no ano de 1623 e é trazida como uma das escalas que compõem o instrumento *Cross-staff* apresentado no tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments for such as are studious of Mathematicall practise* (Figura 1)[13].

13 Para mais informações sobre o tratado vide Santos (2021).

Figura 1: Frontispício do tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments...*



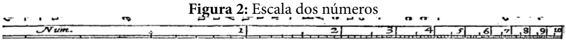
Fonte: Gunter (1624, frontispício)

No período em que Gunter elaborou essa escala, havia na Inglaterra discussões e estudos acerca dos logaritmos decimais, aspecto que estava presente no Gresham College e próximo, dessa forma, de Edmund Gunter pelo fato de, nessa época, ele ocupar o cargo de professor de astronomia no Gresham e ser próximo a Henry Briggs (1561 – 1630) um dos estudiosos que encabeçavam as ideias do logaritmo decimal (COTTER, 1981).

Em resumo, esse contexto, além da necessidade de se realizar cálculos mais facilmente na navegação, impulsionou o desenvolvimento da escala dos números (Figura 2), que foi incorporada ao instrumento *Cross-staff*[14], que diferia dos demais da época justamente por conta dessa escala e de outras advindas também dos estudos sobre logaritmos.

14 Sobre o *Cross-staff* desenvolvido por Edmund Gunter vide Santos e Pereira (2021).

Figura 2: Escala dos números



Fonte: Gunter (1623, p. 31)

Assim, essa escala foi construída com base nos logaritmos decimais desenvolvidos por Briggs, afirmativa que pode ser evidenciada quando Gunter (1623, p. 4, tradução nossa) ressalta que "a escala dos números pode ser inserida no primeiro Chiliad Logarithmes do Sr. Briggs [...]", em que faz referência à construção da escala dos números a partir do tratado *Logarithmorum Chilias Prima* de Henry Briggs sobre logaritmos decimais.

Gunter (1623) traz diversos usos para essa escala, como multiplicar e dividir um número pelo outro, obter a raiz quadrada e cúbica de um número e encontrar a média proporcional de dois números dados e tendo dois números dados, para encontrar um terço em proporção contínua, um quarto, um quinto e assim por diante, manipulação que será explorada na próxima seção.

A proporção contínua

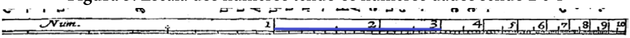
O primeiro uso que Gunter (1623) traz sobre a escala dos números é para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua. Essa manipulação é a mais elementar da escala, por essa razão é a primeira a ser apresentada pelo autor.

Assim, Gunter (1623, p. 18, tradução nossa) ressalta que tendo dois números dados, para encontrar um terço em proporção contínua, um quarto, um quinto e assim por diante é preciso que se "estenda o compasso do primeiro número para o segundo; então você pode transformá-los do segundo para o terceiro, e do terceiro para o quarto, e assim por diante".

Em outras palavras, dados dois números, registra-se com o compasso na escala a distância entre eles, à essa mesma distância, partindo do segundo números se encontra o terceiro, na outra ponta do compasso na escala.

Por exemplo, dados os números 1 e 3, para encontrar um terço em proporção contínua e assim por diante, é necessário registrar com o compasso a respectiva distância entre esses números, como mostra a figura 3.

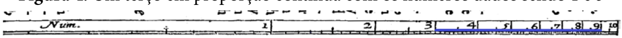
Figura 3: Escala dos números tendo os números dados sendo 2 e 4



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31)

Como essa mesma distância registrada com o compasso, deve-se posicionar um pé do compasso no número 3, e no outro pé encontra-se na escala um terço em proporção contínua considerando 1 e 3, como se observa na figura 4.

Figura 4: Um terço em proporção contínua com os números dados sendo 1 e 3

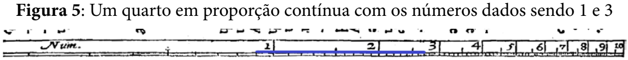


Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31)

Já para encontrar um quarto nessa proporção é preciso encontrar um 9 no começo da escala, haja vista que se posicionarmos um pé no compasso considerando a distância entre 1 e 3, a outra ponta sairia da escala, dessa forma, é necessário encontrar um outro 9.

Essa equivalência de distâncias, do 9 no final da escala para o 9 no começo da escala se dá pois a escala dos números de Gunter (1623) é contínua, uma vez que os números podem ser multiplicados por 10, 100, 1000 etc. e assumir valores diferentes com o mesmo espaçamento, decorrente das propriedades de logaritmo. Desse modo, observa-se na figura 5 o procedimento para se obter um quarto proporcional dados 1 e 3.

Figura 5: Um quarto em proporção contínua com os números dados sendo 1 e 3



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31)

Encontra-se, então, o quarto proporcional de 1 e 3 sendo o número 27, uma vez que a escala, ao encontrar um número no começo para dar continuidade aos cálculos, é multiplicada por 10, assim, a marcação 2 passa a ser considerada como 20.

Ainda para a proporção contínua, Gunter (1623, p. 18-19, tradução nossa) ressalta que

> [...] se os dois primeiros números dados fossem 10 e 9: estenda o compasso de 10 no final da escala, de volta para 9, então você poderá transformá-los de 9 para 8,1 e de 8,1 para 7,29. E assim, se os dois primeiros números dados fossem 1 e 9, o terceiro seria 81, o quarto 729, com a mesma extensão do compasso.

Percebe-se, então, que os termos em proporção contínua considerando os números 10 e 9 decrescem, uma vez que se considerar 1 e 9, os números resultantes em proporção contínua estão em ordem crescente. Nesse caso, constata-se que se o primeiro número dado for maior que o segundo, a proporção contínua é decrescente.

Esse é o processo básico de manipulação da escala dos números para a manipulação de uma proporção contínua, ela é a base para os demais usos da escala e incorpora diversos conhecimentos matemáticos que podem ser mobiliados a partir de atividades didáticas na formação de professores.

Propostas de atividades didáticas com a escala dos números

É possível introduzir a escala dos números na formação inicial ou continuada de professores por meio de atividades didáticas que possibilitem um novo ponto de vista ao se explorar aspectos matemáticos na Educação Básica, no que diz respeito à abordagem e a organização do ensino.

Com base na BNCC, a escala dos números pode promover reflexões a respeito da competência específica 5 sobre:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 532).

Além da competência destacada, atividades considerando a escala dos números e a proporção contínua podem levar o aluno a alcançar a habilidade (EM13MAT508) de "identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas" (BRASIL, 2018, p. 541).

Assim, o conjunto de atividades tem como objetivo mobilizar conhecimentos matemáticos sobre progressão geométrica e logaritmos a partir do manuseio da escala dos números para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua.

Considerando a escala dos números e sua manipulação sobre proporção contínua emergem diversos elementos matemáticos nesse processo, que podem ser mobilizados a partir de atividades, como por exemplo, o assunto de Progressão Geométrica (PG), de logaritmo e suas propriedades.

Mobilizando o conhecimento sobre progressão geométrica crescente

Com a escala dos números e um compasso em mãos e considerando a manipulação da proporção contínua, responda os problemas a seguir de acordo com o cenário a seguir.

As ruas do centro da cidade de Londres no século XVII contêm casas e estabelecimentos enumerados que obedecem a uma determinada proporção contínua. As duas primeiras construções do lado esquerdo da rua A são enumeradas com 1 e 3 respectivamente.

1. Usando a escala dos números e o compasso, identifique a numeração das três primeiras casas localizadas do lado esquerdo da rua A.
2. Qual a numeração da quinta casa desse lado da rua?
3. Identifique a proporção contínua entre os números das casas.

Nessa atividade em específico mobilizam-se aspectos matemáticos voltados para progressão geométrica, possibilitando ao futuro professor ou professor em formação contínua percepções em relação à progressão geométrica, podendo (re)formular sua praxe no que se refere à organização e disposição do ensino desse elemento.

Mobilizando o conhecimento sobre progressão geométrica decrescente

Agora, considerando o mesmo cenário descrito acima sobre as ruas de Londres, responda os problemas propostos a seguir com o auxílio da escala dos números e de um compasso,

As duas primeiras construções do lado direito da rua A são enumeradas com 10 e 7 respectivamente.

1. Usando a escala dos números e o compasso, identifique a numeração das três primeiras casas localizadas do lado direito da rua A.
2. Qual a numeração da quinta casa desse lado da rua?
3. Identifique a proporção contínua entre os números das casas.

Nessa atividade se mobilizam conhecimentos voltados também para a progressão geométrica, mas nesse momento foca uma PG decrescente, na qual se espera que seja formulada uma sequência decrescente dos números encontrados na escala, tendo 10 e 7 como parâmetros iniciais.

A relação entre a progressão geométrica e os logaritmos incorporados na escala dos números

Visto que a escala dos números tem o conhecimento de logaritmos incorporado, responda os problemas a seguir com base na proporção contínua tendo em vista sua relação com os logaritmos.

1. Qual a relação do conhecimento logarítmico incorporado na escala e a proporção contínua?
2. Utilizando o conhecimento inserido na escala, explique matematicamente como a manipulação da proporção continua acontece em cada uma das atividades anteriores.

A última atividade retoma as ideias matemáticas mobilizadas anteriormente, contudo propõe que seja feita uma relação com os logaritmos que não estão explícitos na escala, mas que são responsáveis pelo procedimento da proporção contínua ser executado de forma objetiva.

Conclusões

A história pode ser aliada ao ensino de matemática de diversas maneiras. Uma delas é considerar um recurso potencialmente didático advindo dela para que sejam exploradas possibilidades de incorporá-lo ao ensino de matemática de modo a construir, ressignificar ou tornar o indivíduo crítico quanto a maneiras de abordar certos assuntos matemáticos.

Desse modo, escolheu-se para esse estudo a escala dos números como recurso potencialmente didático para o ensino de progressão geométrica e de logaritmos, especificamente sua manipulação para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua.

Nesse sentido, apresentei um breve panorama do contexto histórico em que a escala dos números foi elaborada, a Londres do século XVII, por Edmund Gunter, a partir dos logaritmos decimais de Henry Briggs, apresentando a seguir a manipulação dessa escala para utilização da proporção contínua.

Por fim, orientações de atividade que podem ser levadas à formação inicial ou continuada de professores de matemática foram propostas, com fim de apresentar a esse público uma visão diferente de abordar progressão geométrica e logaritmos, podendo aliar esses conteúdos.

Referências

ALFONSO-GOLDFARB, A. M. Centenário Simão Mathias: documentos, métodos e identidade da história da ciência. **Circumscribere**: International Journal for the History of Science, [S.I.], v. 4, p. 5-9, 2008.

ALVES, V. B.; PEREIRA, A. C. C. O instrumento "círculos de proporção" exposto na obra de William Oughtred (1633): um elemento na interface entre história e ensino de matemática. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v. 7, n. 2, p. 89-108, 11 set. 2018.

BATISTA, A. N. S.; PEREIRA, A. C. C. A balestilha: um instrumento náutico como recurso para abordar conceitos matemáticos. **Hipátia**, São Paulo, v. 2, n. 1, p. 40-51, jun. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

COTTER, C. H. Edmund Gunter (1581–1626). **Journal Of Navigation**, [S.L.], v. 34, n. 3, p. 363-367, set. 1981. Cambridge University Press (CUP).

GUNTER, E. **The Description and use of the Sector, The Crosse-staffe and other instruments, For such as are studious of Mathematicall practise**. London: William Jones, 1623.

GUNTER, E. **The Description and use of the sector. The Crosse-staffe and other instruments. For such as are studious of Mathematicall practise**. London: William Jones, 1624.

KRIPKA, R. M. L.; SCHELLER, M.; BONOTTO, D. L. La investigación documental sobre la investigación cualitativa: conceptos y caracterización.. **Revista de Investigaciones Unad**, [s.l.], v. 14, n. 2, p. 55, 24 nov. 2015. Universidad Nacional Abierta y a Distancia.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. A reconstrução do Báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. **Revista Cocar**, [s.l.], v. 13, n. 25, p. 342-372, fev. 2019. Universidade do Estado do Para.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re) construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SAITO, F.; DIAS, M. S. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação (Bauru)**, [s.l.], v. 19, n. 1, p.89-111, 2013. FapUNIFESP (SciELO).

SANTOS, A. G. Instrumentos matemáticos contidos no tratado de Edmund Gunter (1623). In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 14., 2021, Uberaba. **Anais [...]**. Uberaba: Sbhmat, 2021. p. 1-13.

SANTOS, A. G.; OLIVEIRA, A. N.; PEREIRA, A. C. C. As contribuições da régua de cálculo linear na construção dos saberes e das práticas docentes. **Boletim Online de Educação Matemática**, [S.L.], v. 8, n. 15, p. 17-36, 9 out. 2020. Universidade do Estado de Santa Catarina.

SANTOS, A. G.; PEREIRA, A. C. C. Questões didáticas envolvendo as escalas do Cross-Staff (1623) elaborado por Edmund Gunter. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v. 10, n. 1/2, p. 105-118, out. 2021.

SILVA, I. C.; PEREIRA, A. C. C. Definições e Critérios para o Uso de Textos Originais na Articulação entre História e Ensino de Matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, [S.L.], v. 35, n. 69, p. 223-241, jan. 2021. FapUNIFESP (SciELO).

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

CAPÍTULO 3

Uma proposta de atividade advinda do tratado *L'usage Du Compas de Proportion* de Didier Henrion, um professor francês do século XVII

Thalya Cristiny de Sousa Masseno

A história da matemática é muitas vezes considerada uma fonte de instrumentos que auxilia o professor de matemática em sala de aula, isso quando utilizam-se de leituras adequadas e atualizadas, que podem promover entre os alunos uma visão mais crítica da matemática e uma construção de seu conhecimento (SAITO, 2015). Tornando possíveis momentos das aulas de matemática que sejam de reflexão e debates, saindo um pouco da mecânica de apenas resolver problemas matemáticos na qual não permite desenvolver um "cidadão crítico" como sugere a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018, p. 265).

Pensando nessa vertente da história e nos recursos didáticos que proporciona para o ensino de matemática, o Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) vem realizando pesquisas que envolve a identificação, construção e o desenvolvimento de recursos advindos de tratados que retratam a fabricação e o uso de instrumentos históricos matemáticos[15]. Por exemplo, Alves e Pereira (2020), Oliveira e Pereira (2020) Santos e Pereira (2020), Batista e Pereira (2020), Oliveira (2019), Pereira e Saito (2019).

15 Segundo Saito (2015, p. 187) eram novos instrumentos concebidos em virtude da demanda por novos métodos matemáticos e experimentais, entre os séculos XVI e XVII, na qual servia para medir aquilo que Aristóteles denominava quantidades (distâncias e ângulos).

Pereira e Saito (2018, p. 119) reforçam a importância pedagógica da utilização desses instrumentos, pois "fornece atividades relacionadas ao conhecimento matemático incorporado no instrumento". Partindo desta perspectiva, este capítulo tem por objetivo criar uma proposta de atividade a partir do estudo da linha de partes iguais descrita no tratado *L'usage du compas de proportion* (1631), em que fornecerá aos licenciandos de matemática uma reflexão sobre o uso do compasso na educação básica.

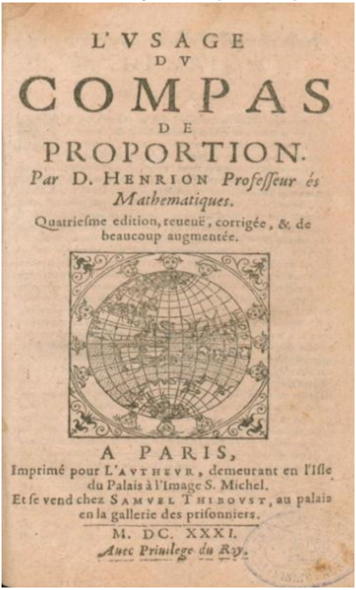
Sendo em dois tópicos, o primeiro será uma breve descrição do tratado do francês Henrion (1631) e o segundo apresentará uma proposta de atividade advinda do estudo do tratado francês *L'usage du Compas de Proportion* de Didier Henrion, que traz a fabricação e o uso do instrumento matemático compasso de proporção[16].

Descrição do tratado *L'usage du Compas de Proportion*: conteúdo histórico e matemático

Partindo da pesquisa documental, foi realizado um estudo do tratado *L'Usage du Compas de Proportion*, do francês Didier Henrion, um professor das matemáticas, publicado em 1631 na sua quarta edição. Todas essas informações podem ser identificadas mediante a observação do frontispício (Figura 1).

16 Para facilitar a leitura será utilizado a tradução Compasso de Proporção na qual o documento francês intitula o instrumento por *Compas de Proportion.*

Figura 1: Frontispício do *L'Usage du Compas de Proportion*, versão 1631



L'VSAGE
DV
COMPAS
DE
PROPORTION.
Par D. HENRION Profeſſeur és
Mathematiques.
Quatrieſme edition, reueuë, corrigée, & de
beaucoup augmentée.

A PARIS,
Imprimé pour L'AVTHEVR, demeurant en l'Iſle
du Palais à l'Image S. Michel.
Et ſe vend chez SAMVEL THIBOVST, au palais
en la gallerie des priſonniers.
M. DC. XXXI.
Auec Priuilege du Roy.

Fonte: Henrion (1631, s.p)

Além do ano de publicação, nome do tratado, do autor e de seu ofício, mediante a contemplação da figura 1, é possível visualizar que foi publicado em Paris, impresso pelo autor, residente na ilha do Palácio da Imagem S. Michel. O tratado era vendido na casa de Samuel Thiboust, no palácio, da galeria dos prisioneiros (HENRION, 1631).

Para entender a composição e os motivos da elaboração deste documento, primeiramente é preciso entender um pouco dos acontecimentos da Europa nos séculos XVI e XVII. Este período estava passando por grandes transformações políticas, econômicas e sociais, principalmente por causa da abertura do comércio marítimo, quando se via a necessidade de conhecimentos práticos que auxiliassem nas navegações.

Além disso, foi marcada por grandes e pequenos conflitos, por exemplo, as guerras religiosas na França e a guerra de trinta anos, entre outros que necessitavam de conhecimentos práticos. Segundo Cuomo (1998), as guerras nesse período tiveram seu papel político, ganhar uma batalha tornou-se uma questão de quem disparou melhor as armas, por esse motivo emergiram a necessidade de tratados militares que apresentassem problemas análogos às categorias teóricas e práticas das artes militares tendo como público-alvo os senhores das guerras.

Com difusão desses tratados, os praticantes matemáticos[17] foram mais evidenciados, já que antes deste período apenas os eruditos eram considerados importantes para sociedade. Neste contexto, Didier Henrion publica seus dois volumes de *Mémoires Mathematiqves recveilliset dressez em faveur de la noblesse Françoise*, em 1613 e 1627, que possuem instruções para os oficiais da nobreza francesa (ITARD, 1972), ou seja, era voltado à arte da guerra. Traz também breve instruções sobre o uso do instrumento compasso de proporção, sem fazer referências a sua construção, pois Henrion acreditava que o engenheiro do rei, Monsieur Jacques Alleaume, que o atribui como desenvolvedor do instrumento, iria publicar sobre o assunto.

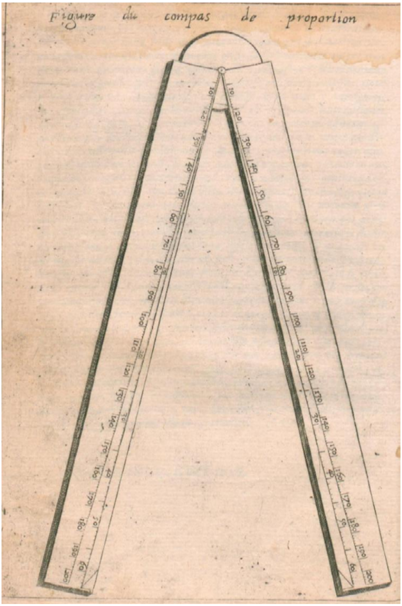
Segundo Henrion (1631), como o Monsieur Jacques Alleaume não fez, a partir de suas *Mémoires Mathematiqves*, Henrion publicou sobre a construção e o uso do compasso de proporção, que lhe renderam quatro edições de *L'usage du compas de proportion*, sem mencionar as publicações ocorridas após sua morte. A quarta edição que será estudada não evidenciou tanto as demons-

17 Os praticantes de matemática denominavam-se professores de matemáticas, no sentido de que professava a arte matemática. A maioria deles, entretanto, não tinham formação universitária. Sua atividade estava associada a uma corporação de ofício, ou trabalho em uma oficina que fabricava instrumentos. Desse modo, era muito comum que estes profissionais desenvolvessem seu próprio instrumento e comunicassem a respeito de sua construção e uso apenas àqueles que procurassem a sua instrução em sua oficina ou em uma escola de ábaco. Muitos deles mantinham estreito contato com eruditos e pessoas próximas a príncipes e governantes (SAITO, 2015, p. 172 e 187).

trações como nas edições anteriores, pois não eram necessárias ao seu público-alvo.

Por sua vez, o tratado de Henrion (1631) é dividido em um livro e um apêndice. Sendo, o livro intitulado *Les plus belles et utiles operations qui se pratiquent sur le compas de proportion*, contendo 53 proposições que Didier Henrion evidencia como as operações úteis, praticadas com o compasso de proporção (Figura 2). O apêndice é fragmentado em sete capítulos que apresentam a construção e o uso de compasso de proporção, mostrando novas linhas estudadas por Henrion.

Figura 2: Compasso de Proporção



Fonte: Fonte: Henrion (1631, s.p)

O compasso de proporção é composto por duas réguas iguais e uma dobradiça que possibilita a movimentação dessas réguas, como visualiza-se na Figura 2. Essas duas réguas são divididas em duas linhas iguais, que Henrion (1631) chamará de linha de partes iguais a escalada em 200 partes e a outra de linha de planos ou das superfícies. Além dessas duas linhas, em seu texto, Henrion apresenta várias outras, tais como: linhas de sólidos, de corda e de metais.

Para construção da proposta de atividade serão utilizadas apenas a construção da linha de partes iguais. Logo, não serão levadas em consideração o uso desta e das outras linhas apresentadas neste capítulo.

Proposta de atividade didática para a formação do professor de matemática

Neste tópico apresentarei uma proposta de atividade a partir da construção das linhas de partes iguais, descrita no tratado *L'usage du compas de proportion* (1631). O eixo temático da atividade é a geometria, especificamente, os conhecimentos que emergem quando o compasso comum é utilizado ao dividir-se um segmento de reta em várias partes iguais.

A meta é realizar uma reflexão, na formação inicial do professor de matemática, sobre a utilização do compasso nas aulas da educação básica, que proporcionará a construção de um produto final, um plano de aula, cujo objeto de pesquisa será a construção da linha de partes iguais descrita por Henrion (1631), que terá uma duração média de 3 horas/aulas.

Para auxiliar o alcance da meta foram propostos quatro objetivos: Apresentar a descrição da construção das linhas de igual partes advindas do tratado *L'usage du compas de proportion* (1631), de Didier Henrion; Identificar e justificar os conhecimentos geométricos utilizados na construção de uma linha de iguais partes mediante a utilização do compasso; Refletir sobre a utilização do compasso em sala de aula; Desenvolver um plano de aula na qual tenha como recurso didático um compasso.

O pré-requisito é ter realizado a disciplina de desenho geométrico ou ter conhecimento inicial sobre a construção de uma mediatriz com uso do compasso. No decorrer da atividade, notam-se os seguintes conteúdos: ponto, segmento de reta, mediatriz e perpendicularismo, entre outros assuntos identificados pelos participantes.

A proposta de atividade foi desenvolvida visando a aprendizagem cooperativa[18] no âmbito da formação do professor, que, segundo Santos (2012), é uma oportunidade dos licenciandos conhecerem abordagens pedagógicas inovadoras e eficazes, que colabora com os confrontos aos métodos tradicionais.

Como foi explanado nos objetivos, essa atividade poderá ser dividida em quatro momentos, sendo a primeira uma apresentação da construção de partes iguais, na qual o aplicador do curso disponibilizará aos participantes a descrição da construção da linha, mediante o trecho a seguir:

> Primeiro, você tem que fazer de latão, ou de outro material sólido, duas réguas ABC, ADE, iguais sendo unidas em A, com cloud e a dobradiça, que possam mexer livremente e uniformemente em torno do referido centro A: a seguir, conforme as regras do ponto A acima mencionadas, são conduzidas as retas AF, AG, que também cortam BC, DE em dois, ou faça que cada parte seja relacionada ao seu correspondente: então, cada um desses AF, AG é dividido em 100 ou 200 partes iguais, ou em qualquer outro número que se desejar, de acordo com o tamanho do instrumento que permitir: Porque o que faremos normalmente tem apenas 5 ou 6 por cento de comprimento, e com menos de um por cento de largura, cada uma dessas linhas AF, AG é dividida apenas em 200 partes, cuja divisão é tão fácil que não precisa ser aprendida; diremos apenas que para o método mais confiável, devemos primeiro dividir toda a linha em duas outras partes iguais, então uma dessas partes em duas outras partes iguais, e novamente uma dessas metades em cin-

18 Santos (2014).

co partes iguais, e assim você terá a 20ª parte de toda a linha, que valerá, portanto, 10 partes; depois deste fato, com um pequeno compasso, pegue o tamanho desta última parte, e transfira-a ao longo das AF, AG, e cada uma será dividida de 10 a 10; e tendo marcado essas divisões por pontos, e desenhado pequenas linhas ao longo da linha, você também vai dividir umadelas em duas partes e, da mesma forma, carregará esta metade por cada décimo, de modo que cada uma das linhas AF, AG seja dividida de 5 a 5: Finalmente, dívida uma dessas partes em 5 outras partes iguais e você terá a unidade, com a qual você divide cada uma das outras partes das linhas AF, AG, que por este meio se dividirão em 200 partes iguais. Agora, essa linha assim dividida é normalmente chamada de linha reta, ou liga de partes iguais [19] (HENRION, 1631, p. 1 e 2, tradução nossa).

Com o trecho acima, os alunos irão tentar construir as linhas de partes iguais utilizando apenas o compasso e uma régua não milimetrada. Ressalto que depois de entregar o trecho aos participantes, deve-se mostrar a foto do instrumento (Figura 2) que possui as linhas de partes iguais, isto ajudará na compreensão da atividade.

19 Premierement il faut faire de laton, ou autre matiere solide, deux regles ABC, ADE, du tout egales, lefquelles foient tellement conjoinctes en A, auec vu cloud & charniere, qu'elles te puiffent librement & uniformément mouuoira l'entour dudit centre A: en apres, fur le plan desdites regles du poinct A, foient menees les lignes droictes AF, AG, qui couppent BC, DE en deux également, ou en forre que chafque partie foit à sa correspondante: puis chascune d'icelles AF, AG soit divifée en 100 ou 200 parties égales, ou en tel autre nombre qu on voudra, felon que la grandeur de l'instrument le pourra permettre: et pource que celuy dont nous nous seruons ordinairement n'a que 5 ou 6 poulces de long, & moins d'un poulce de large, chacune de ces lignes AF, AG n'est divifée qu'en 200 parties, laquelle division est si aisé qu'il n'est besoin de l'en seigner ; seulement dirons nous que pour le plus feur & cõmode il faut premierement diviser toute la ligne en deux autres parties egales, puis l'une de cesparties en deux autres parties egales, & encore l'u'ne de ces moitiez cy en cinq parties egales,& par ainsi vous aurez la 20 e partie de toute la ligne, qui par consequent vaudra 10 partes; ce faict prendre avec un petit compas la grandeur de ceste derniere partie, & la transferez le long d'icelles AF, AG, & chacune sera divifée de 10 en 10; & ayant marqué ces divisions par poincts, & tiré de petites lignes en trauers de la reigle, vous diviserez l'une d'icelles parties en deux egalement, & porterez semblablement ceste moitié par toutes les dixaines, afin que chacune desdites lignes AF, AG foit divifée de 5 en 5: Finalement divifez l'une de ces parties en 5 autres parties egales, & vous aurez l'unité, auec laquelle vous diviferes chacune des autres parties desdictes lignes AF, AG, qui par ce moyen feront divifées en 200 parties égales. Or ceste ligne ainsi divifée s'appelle ordinairement ligne droicte, ou ligue des parties égales.

É de extrema importância que todos os papéis da aprendizagem cooperativa distribuídos antes de iniciar atividade sejam realizados pelo grupo. Pois enquanto os participantes estão tentando construir as linhas, o observador da equipe estará anotando os passos utilizados na construção, desta forma ficará bem mais fácil passar para o segundo momento.

Nesta etapa serão identificados e justificados os conhecimentos geométricos utilizados na construção de uma linha de iguais partes mediante a utilização do compasso. Na justificativa destes conhecimentos geométricos, os participantes poderão utilizar livros para fundamentar suas justificativas.

Ao finalizar o segundo momento, os grupos devem refletir sobre a utilização do compasso nas aulas da educação básica. O aplicador da atividade deve levantar questionamentos sobre o assunto, que proporcionem discussões e reflexões, fazendo assim os participantes saírem do terceiro momento e caminharem para o quarto. Neste último momento, eles começam a pensar e a planejar sobre como usufruir do compasso na sala de aula, desenvolvendo assim o produto final da formação, um plano de aula que possua como recurso didático um compasso.

Considerações finais

Mediante a proposta da atividade apresentada, é possível visualizar potencialidades que a utilização de fontes históricas pode fornecer à formação dos licenciandos de matemática. Segundo Pereira e Pereira (2015), o uso de fontes históricas permite um aprimoramento do pensamento matemático por meio das reflexões, proporcionando até um repensar da sua prática docente.

Ao utilizar uma atividade advinda da história da matemática na formação inicial do professor, constrói-se um futuro professor crítico e desenvolvem-se reflexões que apenas através da matemática pura, ou seja, com suas definições e teoremas, ele/ela não consegue construir. Mas este capítulo não foi realizado para criticar a matemática pura, pois ela também é extremamente importante para a formação do futuro professor de matemática.

O principal foco dessa atividade é mostrar que os recursos advindos da história devem também fazer parte da formação destes futuros professores, pois a história da matemática vai além da motivação, ela aguça a compreensão da construção dos conhecimentos matemáticos, proporcionando assim uma reflexão ao licenciando sobre seu papel de docente.

Vale ressaltar que a atividade criada neste capítulo é apenas uma proposta de atividade que pode ou não gerar reflexões ao ser aplicada, um recorte de uma atividade advinda da pesquisa de mestrado que visa a construção de uma interface entre história e ensino de matemática na formação inicial do professor. Portanto, os planos futuros serão a aplicação desta atividade para verificar se irão ou não gerar a reflexão esperada pela pesquisadora.

Referências

ALVES, V. B.; PEREIRA, A. C. C. Seno, cosseno e tangente: uma atividade com os círculos de proporção de William Oughtred (1633) na formação de professores de matemática. **Amazônia (UFPA)**, v. 16, p. 74-88, 2020.

BATISTA, A. N. de S.; PEREIRA, A. C. C.. A balhestilha (1603) como um instrumento matemático para o estudo de medidas na formação de professores de matemática. **Acta Scientiarum**. Education, Maringá, v. 43, p. 1-12, 23 nov. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CUOMO, S. N. Tartaglia, mathematics, ballistics and the power of possession of knowledge. **Endeavour**, v. 22, n.1, p.31-35, 1998.

HENRION, D. **L'vsage dv compas de proportion**. 4ª ed. Paris: L' Avthevr, 1631.

HENRION, D. **Mémoires mathematiqves recveilliset dressez en favevr de la noblessse françoise**. Paris: L'Isle Du Palais, 1613.

ITARD, J. HENRION, DENIS or DIDIER. In **Dictionary of Scientific Biography**. 6ª ed. Jean Hachette, & Joseph Hyrtl, 271-272. New York: Charles Scribner'S Sons, 1972.

OLIVEIRA, F. W. S. **Sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578) na formação do professor de matemática**. 2019. 199 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2019.

OLIVEIRA, F. W. S.; PEREIRA, A. C. C. Uma proposta de atividade com o instrumento jacente no plano para o nono ano do ensino fundamental com foco na semelhança de triângulos. **Revista história da matemática para professores**, v. 6, n. 2, p. 20 – 27, 31 dez. 2020.

PEREIRA, A. C. C.; PEREIRA, D. E. Ensaio sobre o uso de fontes históricas no ensino de Matemática. **REMATEC**. Revista de Matemática, Ensino e Cultura (UFRN), v. 10, p. 65-78, 2015.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. Os conceitos de perpendicularidade e de paralelismo mobilizados em uma atividade com o uso do báculo (1636) de Petrus Ramus The concept of perpendicularity and parallelism mobilized in an activity with the use of the baculum (1636) of Petrus Ramus. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, p. 405-432, 2019.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. Os instrumentos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S.L.], v. 5, n. 14, p. 109-122, 25 ago. 2018.

RODRÍGUEZ, U. P.; LIRES, M. Á.; BEVIÁ, J. L. Fray Martín Sarmiento y la Educación Científica. II. La enseñanza de las Matemáticas y la Astronomía. **Revista de Investigación En Educación**, Pontevedra, v. 7, p. 37-49, mar. 2010.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SANTOS, A. G. dos; PEREIRA, A. C. C. A incorporação da régua de cálculo no ensino de multiplicação através da sua construção e do seu manuseio. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 7, p. 357-369, 2020.

SANTOS, P. J. Aprendizagem cooperativa na formação de professores: Balanço de uma experiência. In: ZABALZA, Carlinda Leite e Miguel. **Superior: Inovação e qualidade na docência**. Porto: Ciie – Centro de Investigação e Intervenção Educativas, 2012. p. 8479-8493.

CAPÍTULO 4

Uma proposta de UBP fazendo uso da balhestilha em um passeio de veleiro em Fortaleza

Antonia Naiara de Sousa Batista

A história da matemática, quando tratada do ponto de vista de um campo de investigação, tende a oferecer uma série de recursos e estratégias que podem subsidiar o planejamento de atividades para a abordagem de conhecimentos não só históricos, mas também matemáticos, de modo a promover um diálogo entre os conhecimentos matemáticos estabelecidos no passado com os do presente.

Chaquiam (2017, p. 14) destaca que "estudos apontam que a história da matemática, combinada com outros recursos didáticos e metodológicos, pode contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática". E uma das consequências é que a partir desse estudo histórico é possível perceber a Matemática de maneira mais contextualizada, humanizada, prazerosa e passível de articulação com outras disciplinas (CHAQUIAM, 2017).

Batista e Pereira (2021) tratam de um recurso que advém do campo da história da matemática e que pode ser levado para a sala de aula, sendo conhecido por balhestilha. Esse instrumento, foi utilizado nas navegações entre os séculos XV e XVIII e se encontra em diferentes documentos originais[20], sendo um deles a *Chronographia, Reportorio dos Tempos...*, redigido por Manoel de Figueiredo (1568 – 1630), publicada no século XVII.

20 De acordo com Silva e Pereira (2021, p. 225), o documento original pode ser uma obra extensa que trata de distintos assuntos, enquanto "os textos originais são recortes escritos de documentos originais e que podem ser utilizados para a elaboração de alguma atividade a ser inserida em sala de aula".

De acordo com Castillo e Saito (2016, p. 238), esses instrumentos "são construtores de conhecimento e revelam interessantes aspectos do saber matemático". Por isso, não podem ser reduzidos a meros instrumentos para se encontrar determinada medida, pois neles estão incorporados o saber-fazer de uma época e daqueles que o construíram.

Um outro elemento importante nesse contexto são os tratados, que permitem, a partir do seu estudo, buscar outros tipos de documentos originais que possibilitem formar uma rede de conhecimentos que se interligam, dando a oportunidade de conhecer as matemáticas[21] existentes em determinado período e em torno do instrumento que está contido neles. Voltando-se para o ensino, Castillo (2021) ressalta que esses tratados permitem a articulação com outras áreas do conhecimento, além de promover questões e problemáticas, vislumbrando a construção de um ambiente de investigação.

Partindo dessa possibilidade, percebeu-se na Unidade Básica de Problematização (UBP)[22] definida por Pereira e Tavares (2016, p. 1) como "um *flash* discursivo memorialístico que descreve uma prática social realizada em um determinado campo de atividade humana, como uma proposta metodológica ativa para as aulas de Matemática", a oportunidade de articulá-la com o instrumento balhestilha. De acordo com Tavares e Pereira (2017, p. 27), essa UBP se caracteriza como atividades investigatórias que dão espaço as

> [...] possibilidades de aprendizado a partir da investigação em História da Matemática trazendo melhorias no ensino a partir de um estudo histórico epistemológico dos conteúdos matemáticos, de forma a explicar os "porquês" existentes nos conteúdos matemáticos escolares.

21 Antes do século XIX, tinha-se as matemáticas, não havia o sentido de "matemática" como área autônoma e unificada, existiam a geometria, a aritmética, astronomia, música, estereometria, entre outras, que eram denominadas pôr as matemáticas (SAITO, 2015).

22 Para mais informações sobre a UBP vide: Miguel e Mendes (2010) e Soares (2011).

As autoras destacam que a melhoria vem a partir do estudo do contexto considerando aspectos históricos, matemáticos e epistemológicos do período no qual o recurso utilizado estava inserido. As autoras destacam que a UBP "tem como objetivo colaborar na formação de docentes de matemática, com uma metodologia que enfatiza a participação do aluno no seu processo de aprendizagem, de maneira a torná-lo um cidadão crítico e agente transformador da sua realidade" (TAVARES; PEREIRA, 2017, p. 27).

Assim, esse breve estudo visa propor uma UBP pautada no texto do uso da balhestilha contido na *Chronographia, Reportorio dos Tempos...* para o estudo de conceitos matemáticos. A seguir, têm-se: um tópico destinado a parte histórica de ambos, tratado e instrumento, em seguida, a proposta em formato de prática, e por fim, as considerações finais.

A *Chronographia, Reportorio dos Tempos...* e o instrumento balhestilha

Durante os séculos XVI e XVII, houve uma grande produção de tratados que estavam inseridos na tradição dos *Reportórios dos Tempos*, como se pode ver em Batista (2021). De acordo com a autora esses documentos "reúnem conhecimentos não só voltados a contagem do tempo e o regimento do universo, mas alguns deles voltam-se para as grandes navegações, produzindo conteúdos que envolvem a construção e/ou uso de instrumentos históricos" (BATISTA, 2021, p. 13).

Dentre esses tratados, pode-se destacar a *Chronographia, Reportorio dos Tempos...*, escrita por Manoel de Figueiredo, mestre em matemáticas e natural de Torres Novas, que teve a publicação de sua obra em 1603, impressa por Jorge Rodrigues a partir da licença dada em Lisboa (Figura 1).

Figura 1: Frontispício da *Chronographia, Reportorio dos Tempos...*

CHRONOGRAPHIA
REPORTORIO DOS TEMPOS, NO QVAL SE CONTEM VI. PARTES, S. DOS TEMPOS: ESPHERA, Cosmographia, & arte da nauegação, Astrologia rustica, & dos tempos, & pronosticação dos eclipses, cometas, & sementeiras. O calendario Romano, cõ os eclypses ate 630. E no fim o vso, & fabrica da balhestilha, & quadrante gyometrico, com hum tratado dos Relogios.
COMPOSTO POR MANOEL de Figueiredo natural de Torres Nouas.
Mihi autem absit Gloriari Nisi in cruce Domini Nostri Iesu Christi
Empresso com licença em Lisboa por Iorge Rodriguez a custa de Pero Ramires. Anno de 1603.

Fonte: Figueiredo (1603)

De acordo com Batista e Pereira (2021, p. 3), esse documento "remonta a tradição de navegantes e navegadores, que mobilizavam conhecimentos de geometria prática, apropriados por estudiosos de geometria no século XVI e que já faziam parte da arte de navegar". Ademais, ele reúne diferentes conhecimentos, como astronômicos, cosmográficos, astrológicos, geográficos, entre outros que estavam em desenvolvimento e se articulavam entre sim, com vista a atender uma demanda relacionada a navegação astronômica (Quadro 1).

Quadro 1: Descrição das partes que compõem a *Chronographia, Reportorio dos Tempos...*

PARTE	TÍTULO
P1	Do tempo e suas partes.
P2	Da astronomia, na qual se trata do céu, e de suas partes, e de como nele pois DEUS o tempo, juntamente com todos os seus movimentos, estrelas, planetas, orbes, eixos, polos, círculos da esfera, e com todas as mais coisas que DEUS nele criou, ordenou.[23]
P3	Da geografia em que declaramos a terra, a qual teve o terceiro lugar nas palavras da sagrada escritura, DEUS criou o céu, e a terra.[24]
P4	Da astrologia rústica, muito necessária para a agricultura, e para todo o lavrador curioso amigo da lavoura, e com um tratado muito necessário, e proveitoso a saúde humana para os físicos, surgiães, e sangradores, e pronosticação dos eclipses do sol, e da lua.[25]
P5	Do calendário, epacta, número áureo, endiçam, temporas, e da pronosticação dos 12 meses do ano, e do lunário de 603 até 630 com os eclipses no cabo do lunário, e suas significações.[26]
P6	Da fabrica, e uso da balhestilha, ou radio astronômico, e do uso e fabrica, do quadrante geométrico e da fabrica, e uso dos relógios horizontais, verticais, laterais, equinociais, polares declinantes a todas as partes do mundo, e inclinantes.[27]

Fonte: Adaptado de Batista (2018, p. 32)

23 No proêmio do documento consta que a segunda parte está divida em 34 capítulos. Entretanto, na "Taboa de todos os capítulos que contêm cada parte deste livro", a mesma encontra-se divida em 33 capítulos. Todavia o documento traz apenas 32 capítulos presentes na segunda parte.

24 No proêmio consta que a terceira parte está divida em 12 capítulos. Entretanto, na "Taboa de todos os capítulos que contêm cada parte deste livro" e ao longo do documento a mesma se encontra dividida em 22 capítulos.

25 No proêmio do documento apresenta-se 47 capítulos. No sumário da obra apresenta-se 48 capítulos. No entanto a obra apresenta somente 47 capítulos.

26 Nessa quinta parte o proêmio apresenta 38 capítulos. Entretanto, o sumário mostra 35 capítulos. Mas a obra contém apenas 34 capítulos.

27 O proêmio apresenta a sexta parte dividida em 10 capítulos. Entretanto, a obra traz 12 capítulos.

A partir do Quadro 1 é possível perceber a presença de instrumentos na Sexta parte ou Livro sexto, como a balhestilha ou radio astronômico, o quadrante geométrico e vários tipos de relógios, vertical, horizontal, declinantes, universais, polares, etc. Todavia esses instrumentos estão vinculados a textos que apresentam orientações para sua construção e uso no período.

Além disso, nessa parte também aparecem algumas definições, que o autor chama de proposições, por exemplo, o que é um ponto, uma linha, uma superfície, um corpo, entre outras várias outras. Apresenta-se neste local outras "proposições", que no século XXI, chamamos de construções geométricas, que fazem uso de régua e compasso, orientando como traçar uma reta perpendicular sobre um ponto, ou como dividir um círculo em dois semicírculos, ou dividir um quarto de círculo em 90 partes iguais, entre outras.

Uma proposta de atividade investigativa por meio da UBP pautada no uso da balhestilha

Considerando as práticas culturais, sociais e matemáticas presentes no texto que trata sobre o uso da balhestilha na *Chronographia, Reportorio dos Tempos...*, foi planejada uma UBP direcionada para a formação de professor, no que se refere aos discentes que estão vinculados aos cursos de Licenciatura em Matemática.

Essa UBP teve por base o estudo desenvolvido por Tavares e Pereira (2017), que usam como base a obra *Ex ludi rerum mathematicarum* (Matemática Lúdica), de Leon Battista Alberti de 1452, apesar desse estudo não tratar da fabricação de um instrumento, mas presumir que ele já se encontra pronto para articular com o texto. Sugere-se ao professor consultar antes os estudos de Pereira e Batista (2015) e Batista (2018) para compreender a construção da balhestilha por duas maneiras distintas. A seguir se encontra a proposta de uma UBP que leva em consideração o uso da balhestilha para a mobilização de conhecimentos matemáticos.

Usando a balhestilha para medir distâncias angulares em um veleiro na praia da Barra do Ceará

Introdução: Essa UBP foi elaborada a partir da problemática em torno de duas maneiras de medir com a balhestilha que se encontram no texto do uso, dentro do tratado *Chronographia, Reportorio dos Tempos...*, de modo que os alunos, a partir dela, possam realizar a medição de astros em um final de tarde.

Conteúdos: Geometria.

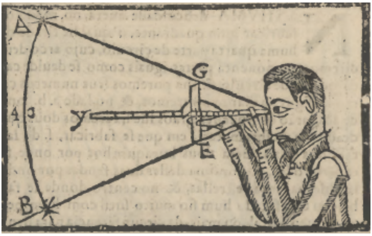
Objetivos: Mobilizar conhecimentos geométricos e de medida a partir da manipulação da balhestilha.

Público-alvo: Alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental (8º ano).

Metodologia: Estruturada pelas propostas de UBP.

Problematização histórica: Partindo da Sexta Parte ou Livro Sexto do tratado *Chronographia, Reportorio dos Tempos...*, de Figueiredo (1603), o autor descreve algumas orientações para o uso da balhestilha ou radio astronômico, como se pode ver a seguir,

> Os astrônomos chamaram a este instrumento radio astronômico, por quanto observarão por este a distância das estrelas de umas as outras observadas por via do raio visual que sai do nosso olho, do qual usam os navegantes para tomarem a estrela do norte quando dito do horizonte sobre a terra para acharem a elevação do polo ártico. E lhe chamaram balhestilha, & quanto ao uso dele é muito fácil, como o demonstra a presente figura.



> No instrumento h.y. pelo qual observo a distância das duas estrelas a.b. passam os raios visuais do olho h pelas extremidades do pinacidio[28] g.e.f. o raio h.a. e raio h.b. & corta o pinacidio no radio h.y. em 40 graus, os quais me mostra o arco a.b. distância de ambas as estrelas, mas os pilotos não tomam distâncias, senão a altura, ou distância do horizonte, pondo uma extremidade da soalha no horizonte, e outra na estrela do norte, & usam as regras do capítulo dezessete[29] da terceira parte deste livro, onde copiosamente pos regras para se achar a elevação do polo pela estrela do norte. Também por outra qualquer estrela tomada no meridiano, tomaremos a elevação do polo, ou latitude da região como no dito capítulo está. E muito bem se pode tomar o sol com a balhestilha assim como obramos nas estrelas (FIGUEIREDO, 1603, fl. 268).

De acordo com o autor, a balhestilha e o radio astronômico são o mesmo instrumento, porém levam essas nomenclaturas distintas por causa da sua finalidade, que segundo Figueiredo (1603) voltavam-se respectivamente, para o uso dos navegantes quando esses desejam encontrar a elevação do polo Ártico, fazendo uso da estrela Polar e da linha do horizonte, e para os astrônomos quando esses desejam encontrar a distância entre as estrelas.

No exemplo, exposto por Figueiredo (1603), tem-se a medição realizada para encontrar a distância entre dois astros A e B, de modo que a partir da observação na extremidade do virote ou radio, o astrônomo deve movimentar a soalha ou pinacidio para frente e para trás até visualizar pelas suas extremidades, superior e inferior, cada um dos elementos considerados. Posteriormente, no local onde a soalha estiver parado, será encontrada a distância entre ambas as estrelas. Levando em consideração essa situação, iremos propor a seguinte prática.

28 Tem o mesmo significado de pinacidio ou soalha, neste caso, a transversal.

29 Provavelmente o autor se enganou ao referenciar o capítulo que tinha essas regras, pois as mesmas se encontram no capítulo dezesseis.

Problematização atual: Um grupo de alunos do Ensino Fundamental embarcaram com a professora de matemática em um passeio escolar para conhecer alguns pontos turísticos de Fortaleza, no Ceará. O ônibus fez paradas na estátua da Índia Iracema na Beira-mar, depois no Centro Dragão do Mar de Arte e Cultura, e por fim, parou na Barra do Ceará para um passeio de barco atravessando o Rio Ceará (Figura 2).

Figura 2: Praia da Barra do Ceará

Fonte: https://www.sesc-ce.com.br/rio-ceara-3/

Sabendo que a professora já tinha falado da balhestilha para seus alunos na escola, estes foram surpreendidos quando encontraram dentro do barco três desse instrumento. Já era final de tarde e o veleiro teve um problema, que ocasionou sua parada no meio do rio Ceará. Enquanto o guia providenciava o conserto do motor, a professora aproveitou o momento e as balhestilhas dispostas para planejar algo para os alunos.

Nesse momento o sol estava quase se pondo e apenas a lua e o planeta Vênus estavam visíveis no céu. Não havia muitos recursos tecnológicos naquele momento, como por exemplo, GPS ou sextantes. Então a professora resolveu estimular os alunos a usar as balhestilhas a partir do texto que tratava sobre o seu uso, que eles tinham visto em uma de suas aulas, de modo a aplicá-la naquele momento. Foi quando retirou da bolsa várias folhas que continham o texto com as orientações dadas por Figueiredo (1603) para a medição dos astros.

Assim, a professora organizou a turma em grupos de quatro alunos sentados no banco do barco, de modo que cada um deles ficasse com uma balhestilha, e começou a fazer várias perguntas, que estimularia os alunos a articular o instrumento físico com o texto, como se pode ver a seguir:

1. Considerando que a balhestilha é um instrumento simples, mas que é formada por mais de uma peça, descreva quais são os seus componentes e a função de cada um deles?
2. Esse artefato é bastante conhecido como balhestilha, mas por que Figueiredo (1603) também o denomina por radio astronômico?
3. A partir da manipulação do instrumento pode se encontrar medidas angulares ou lineares? Justifique sua resposta.
4. Aproveitando que está visível a lua e o planeta Vênus, junto com seu grupo realizem uma medição e relatem o valor encontrado. Expliquem como ela foi realizada.
5. Quais princípios matemáticos que me garantem que a medição foi realizada de maneira correta?
6. Descreva os conceitos matemáticos de distintas áreas da matemática que podem ser articulados no processo de medição.

Considerações Finais

Esses tratados e instrumentos vinculados a eles se tornam potencialmente didáticos porque, a partir da sua mobilização, emergem diferentes conhecimentos matemáticos que estavam presentes no passado, com suas formas e organizações distintas do que temos hoje no século XXI.

Mostramos que a matemática passou por estágios diferenciados de desenvolvimento e que não podemos generalizá-la aos longos anos. Além disso, que cada comunidade, seja de astrônomos, navegantes, ou praticantes de matemática tinham seus próprios conhecimentos ligados ao seu ofício e ao período no qual estavam imersos.

Porém para a abordagem desses instrumentos atrelados aos seus textos históricos é necessário o suporte metodológico, que encontramos na UBP, uma possibilidade de articular práticas constituídas histórico e culturalmente em torno da balhestilha para o ensino de matemática voltadas para a formação do futuro professor de matemática.

Assim, esse estudo traz a proposta de uma UBP pautada no texto do uso da balhestilha de modo a articular com o instrumento físico, como uma alternativa para a mobilização não só de conceitos matemáticos, mas também de conhecimentos vinculados a outras áreas, como a astronomia, a geografia, entre outras.

Referências

BATISTA, A. N. de S. Sobre os conhecimentos incorporados nos Reportórios dos Tempos entre os séculos XVI e XVII. *In:* Seminário Nacional de História da Matemática, XIV, 2021, Uberaba (Minas Gerais). **Anais** [...] Uberaba: Universidade Federal do Triângulo Mineiro, 2021, p. 528 - 544.

BATISTA, A. N. de S. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso da balhestilha, inserida no documento Chronographia, Reportorio dos Tempos..., aplicado na formação de professores**.

2018. 124 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2018.

BATISTA, A. N. de S.; PEREIRA, A. C. C. A balhestilha (1603) como um instrumento matemático para o estudo de medidas na formação de professores de matemática. **Revista Acta Scientiarum, Education**, Maringá, v. 43, p. 1-12, 23 nov. 2021.

CASTILLO, A. R. M. Algumas possibilidades de trabalho com a história da Matemática em sala de aula de forma interdisciplinar. *In.:* PEREIRA, Ana Carolina Costa; MARTINS, Eugeniano Brito. (Orgs.). **Investigações científicas envolvendo a história da Matemática sob o olhar da pluralidade.** Curitiba, Editora: CRV, 2021.

CASTILLO, A. R. M.; SAITO, F. Algumas considerações sobre o uso do báculo (baculum) na elaboração de atividades que articulam história e ensino de matemática. In: SALAZAR, Jesús Flores; GUERRA, Francico Ugarte. **Investigaciones en Educación Matemática**. Perú: Fondo Editorial Pontificia Univesidad Católica del Perú, 2016. p. 237-251.

CHAQUIAM, M. **Ensaios temáticos:** História da matemática em sala de aula. Belém: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2017. 241 p.

FIGUEIREDO, M. de. **Chronographia Reportorio dos tempos, no qual se contem VI. partes, f. dos tempos:** esphera, cosmographia, e arte da navegação, astrologia rustica, e dos tempos, e pronosticação dos eclipses, cometas, e sementeiras. O calendario Romano, com os eclypses ate 630. E no fim o uso, a fabrica da balhestilha, e quadrante gyometrico, com hum tratado dos relogios. Lisboa. 1603.

MIGUEL, A.; MENDES, I. A. Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games. **ZDM**, [S.L.], v. 42, n. 3-4, p. 381-392, 29 abr. 2010. Springer Science and Business Media LLC.

PEREIRA, A. C. C.; BATISTA, A. N. de S. A matemática por trás da Balestilha. **Revista de História da Matemática Para Professores**, Natal, v. 2, n. 2, p. 53-64, set. 2015.

PEREIRA, A. C. C.; TAVARES, M. O. Práticas matemáticas históricas por meio de UBP como um recurso metodológico para as aulas de matemática. *In:* Encontro Nacional de Educação Matemática (Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades), XII, 2016, São Paulo. **Anais** [...] São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016, p. 1 - 6.

SAITO, F. **História da Matemática e suas (re)construções contextuais.** São Paulo: Livraria da Física, 2015. 259 p. (História da Matemática para Professores).

SILVA, I. C. da; PEREIRA, A. C. C. Definições e critérios para uso de textos originais na articulação entre história e ensino de matemática. **Boletim de Educação Matemática – Bolema** [online]. 2021, vol. 35, n. 69, pp. 223-241. EpubApr16, 2021.

SOARES, E. C. **Uma Investigação Histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula.** 2011. 142 f. Dissertação (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

TAVARES, M. O.; PEREIRA, A. C. C. A UBP e sua inserção no ensino de Matemática: Uma proposta utilizando a obra Matemática Lúdica de Leon Battista Alberti (1404 – 1472). **Revista - Boletim online de Educação Matemática (BOEM)**, Florianópolis, v. 5, n. 8, p. 21 – 36, 2017.

CAPÍTULO 5

Uma discussão inicial sobre a construção do *Staffe* de John Davis (1594) para o ensino de geometria

Raniele Sampaio Nogueira

Como profissional da educação, percebe-se que os alunos estão cada vez mais desmotivados pelo ensino, principalmente em relação à disciplina de matemática, pois a maioria se acha incapaz de aprender e desenvolver estratégias para a resolução de problemas matemáticos. Os conteúdos, muitas vezes, são transmitidos apenas com fórmulas, regras, algoritmos, demonstrações e memorizações momentâneas do que está sendo trabalhado, não havendo uma real importância e preocupação no aprendizado dos alunos e internalização dos conceitos. Com isso, o aluno passa a desacreditar em si mesmo, enxergando a matemática como uma ciência pronta e acabada, estruturada a partir de ensinamentos propostos pelo professor (D'AMBRÓSIO, 1989, p. 15).

Independentemente da modalidade de ensino, dificilmente os alunos têm a oportunidade de vivenciarem em uma sala de aula momentos de investigação, exploração e criação, contribuindo assim para que eles passem a acreditar "que na aula de matemática o seu papel é passivo e desinteressante". (D'AMBRÓSIO, 1989, p. 2). Nessa perspectiva, o professor, como mediador do conhecimento, deve proporcionar momentos mais dinâmicos e interativos para que haja um melhor relacionamento com e entre os alunos, contribuindo assim para um aprendizado coletivo. Assim sendo, atividades propostas aos alunos para fazê-los pensar, raciocinar e sair da posição de receptor para ativos na aula, podem facilitar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.

Diante disso, percebe-se que o professor necessita apropriar-se de metodologias e recursos que facilitem a compreensão e aprendizagem matemática, visto que "A concepção de aprendizagem docente [...] não consiste apenas em acúmulo de conhecimentos, mas compõe-se também de apropriações significativas e autogeridas pelo professor" (GAMA; FIORENTINI, 2009, p. 443).

Educadores matemáticos, por sua vez, estão dando maior atenção às relações de ensino e história da matemática, com propostas que articulem a história e a educação matemática, promovendo uma interação "[...] que vão desde aplicações em sala de aula, pautadas em diferentes correntes pedagógicas e em algumas perspectivas historiográficas, até estudos sobre o papel da história da matemática no ensino" (SAITO; DIAS, 2013). Assim, o professor deve buscar diversificar o ensino da matemática envolvendo práticas inovadoras, podendo utilizar recursos advindos da História da Matemática, podendo esta ser incluída de forma prática para auxiliar no esclarecimento das ideias matemáticas construídas pelo aluno.

Nesta perspectiva, Baroni, Teixeira e Nobre (2004, p. 173-174) mencionam alguns métodos de como aplicar a História da Matemática em sala de aula, são eles: desenvolvimento de projetos inspirados pela história; aspectos culturais da matemática em uma perspectiva histórica; tratamento detalhado de exemplos particulares; aperfeiçoando o conhecimento matemático por meio da História da Matemática, e o uso de fontes históricas, este último sendo o recurso utilizado neste capítulo.

Fontes históricas são documentos escritos e materiais concretos que têm por objetivo comprovar as histórias, descobertas e feitos de pessoas que estudaram e utilizaram aspectos matemáticos. Dentre as fontes históricas, tem-se os tratados que contêm elementos matemáticos nos problemas, construção e uso de instrumentos históricos. Dessa maneira, pode-se utilizar as fontes históricas como um recurso pedagógico, havendo uma preocupação ao escolher o conteúdo e a fonte histórica relacionada, pois é um meio que permite ao aluno analisar um texto histórico e retirar dele informações importantes para a compreensão do conteúdo. Sendo assim, o aluno passa a entender e valorizar a história, as culturas e valores contidos na fonte observada (SILVA, 2013, p. 42).

Nessa orientação, Saito e Dias (2013) propõem um diálogo entre educadores matemáticos e historiadores para uma possível construção de interface contribuindo assim para que a história da matemática propicie "a experiência do processo de construção do conceito, promovendo a apropriação da significação dos objetos matemáticos" (SAITO; DIAS, 2013, p.90). Com isso, trazem em seu trabalho a construção e utilização de instrumentos históricos descritos em tratados não necessariamente da matemática, mas contendo elementos que possam auxiliar na compreensão e construção de conceitos matemáticos. Esses instrumentos estão associados a diferentes naturezas: matemáticas, navegação, agrimensura, astronomia, entre outros que estão relacionados às situações cotidianas.

Desta forma, o presente capítulo tem por intenção mostrar a construção do instrumento e que dele podem ser retirados elementos matemáticos para o estudo e compreensão de conhecimentos geométricos, adquiridos através da estruturação de atividades.

O báculo inglês de John Davis

John Davis era um navegador inglês do século XVI que dominava diversas áreas, como Geografia, Hidrografia e Cosmografia. Além dessas ele também dominava aspectos importantes da matemática, visto que seu instrumento foi construído a partir de conhecimentos matemáticos. (MARKHAM, 1889). O instrumento *staffe* elaborado por John Davis foi descrito em seu famoso tratado *The Seamans Secrets*, publicado em 1594. O tratado é voltado para a navegação e conceitua os principais elementos utilizados nessa área, bem como a construção e o uso de alguns instrumentos que auxiliam o navegador, tais como: astrolábio, quadrante, *cross-staffe* e *staffe*, sendo este último de elaboração própria de Davis. O *staffe* é uma espécie de báculo que ficou conhecido posteriormente por Quadrante de Davis e *backstaff*, justamente por ser utilizado de costas para o sol.

Muitos instrumentos náuticos que tinham a finalidade parecida ou igual a do *staffe* eram usados pelos navegadores com o olhar de frente para o sol, o que, com o passar do tempo, acarretava problemas visuais com o dano que a luz solar provocava. Diante disso, John Davis elaborou o instrumento *staffe* com o objetivo de medir a altitude do sol em relação ao horizonte e não danificar mais a vista dos navegadores, com base então na sombra refletida. Sendo assim, o instrumento tinha a limitação de ser usado apenas durante o dia e em dias não nublados para que houvesse uma boa aproximação do que se queria medir. O instrumento era bem semelhante à balhestilha, mas diferenciando-se principalmente na posição em que era feita a medição, visto que a balhestilha era usada de frente para o sol. Dessa forma, o *staffe* passou a ser um importante instrumento de navegação até o século XVIII, substituindo outros, como os já citados anteriormente.

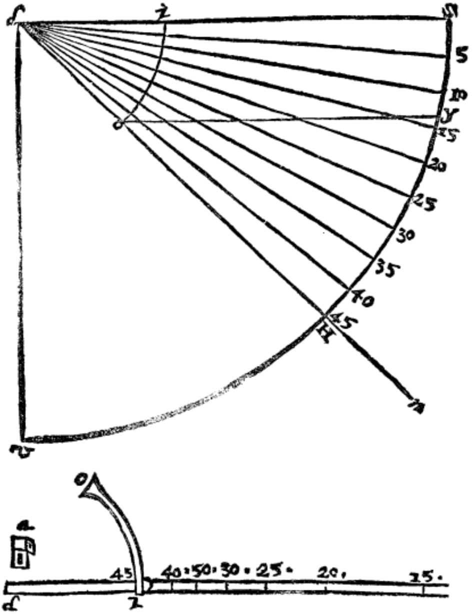
No tratado há duas versões do instrumento. Percebe-se em sua construção conhecimentos geométricos como perpendicularismo, paralelismo, bissetriz de um ângulo, ângulo reto, entre outros. Pode-se perceber tais conhecimentos no detalhamento feito pelo autor para mostrar a construção desse instrumento, como retrata a citação a seguir.

> Desenhe 2 linhas retas, cortando-se em ângulos retos, assim como as linhas dv e ds; sobre o ângulo d, descreva um quarto de círculo, como é o arco vs. Divida esse quadrante em 2 partes iguais pela linha dn, cortando o quadrante no ponto h. Divida o arco sh em 45 partes ou

> graus iguais, traçando linhas do centro d para cada uma dessas divisões; então do ponto I, trace a terceira parte da linha ds; do centro d descreva um arco de um círculo, como é o arco IO, que é para a transversal deste báculo e a linha ds é para o báculo. Então do ponto O, onde a extremidade superior da transversal toca a linha dn, desenhe um paralelo com a linha ds, assim como a linha OY. E como essa linha corta as linhas que são tiradas do centro d, assim deve o bastão ds ser graduado, colocando-se sobre a linha OY. Coloque aquela parte do bastão onde o ponto I toca o ponto O, e então a partir do ponto I, estabeleça os graus, como são as interseções sobre a linha OY e assim o báculo se formou. A transversal no ponto I deve ter um orifício artificial feito para o bastão entrar, como outras aduelas têm. Também deve haver uma placa de metal no centro do báculo, como é a figura. No meio, de onde deve haver uma fenda, através da qual a visão deve ser transportada para o horizonte, e esta placa deve receber a sombra da transversal, e assim o báculo é finalizado (Davis, 1607, p.330, tradução nossa).

A princípio pode ser de difícil compreensão o passo a passo descrito acima, mas logo em seguida Davis registra a figura em seu tratado (figura 1) para relacionar ao texto e assim facilitar no entendimento da construção.

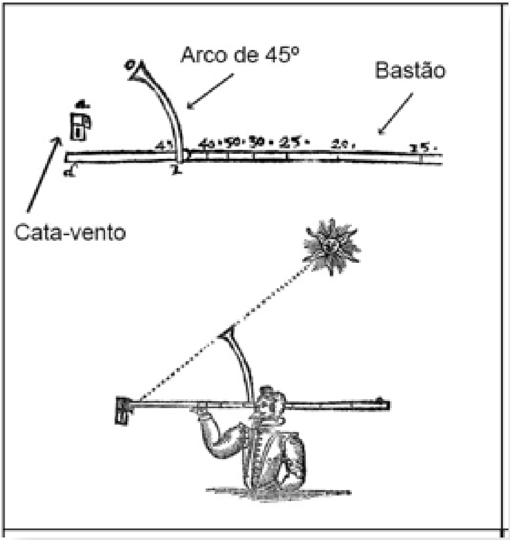
Figura 1: Construção do *staffe*



Fonte: Davis (1607)

Na primeira versão, Davis descreve o instrumento constituído de um bastão graduado de forma angular e um arco de 45º graus, sendo esse retirado de um arco maior medindo um quarto de um círculo. O arco deslizava ao longo do bastão, de maneira que sua sombra se alinhasse com o horizonte. Já na ponta do bastão ... era colocado um cata-vento de metal, com uma fenda no meio, para que o observador olhasse o horizonte por dentro dessa fenda.

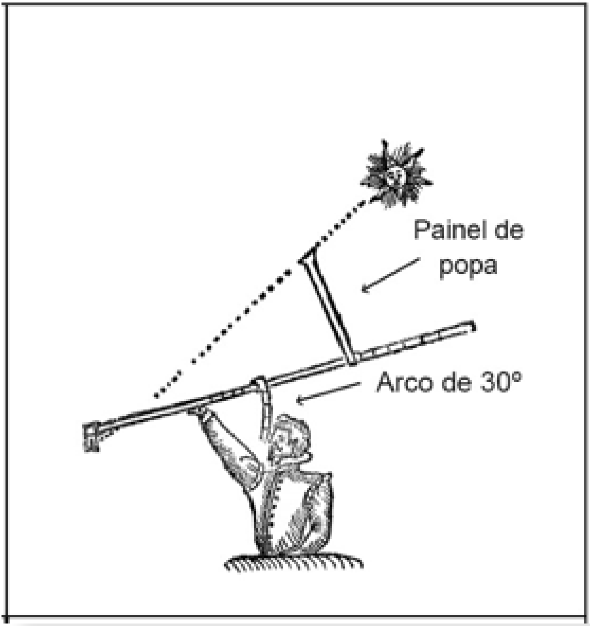
Figura 2: primeira versão do *staffe*



Fonte: adaptada de Davis (1607)

Na segunda versão, o arco de 45º graus foi substituído por um por um bastão de 90º graus, influenciando assim para que posteriormente o instrumento recebesse a nomenclatura de quadrante. Abaixo do bastão acrescentou-se um arco de 30º, onde ficaria fixado um cata-vento para o observador alinhar com o horizonte. Dessa maneira, a altitude "[...] seria encontrada pelo somatório do ângulo indicado pela posição do painel e do ângulo medido no arco, promovendo, assim, uma melhor precisão das medidas". (PEREIRA; BATISTA; SANTOS; NOGUEIRA, 2021, p. 362)

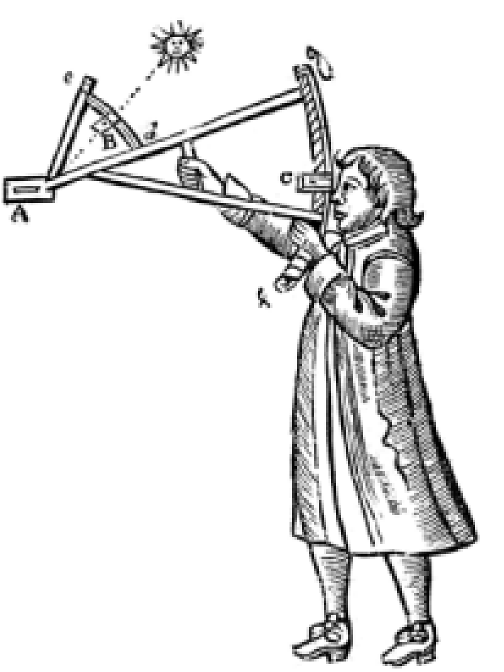
Figura 3: Segunda versão do *staffe*



Fonte: Adaptada de Davis (1607)

Diversas outras adaptações foram sendo feitas para melhorar o instrumento *staffe*, e uma delas consiste na composição do bastão e dois arcos com 30° e 60°. Nesse modelo, "um cata-vento foi preso ao arco de 60 graus e um cata-vento no arco de 30 graus, de modo que a soma dos ângulos nos dois arcos eram aproximadamente equivalentes à altitude estimada do sol" (BRUYNS, 2009, p. 18).

Figura 4: Versão do século XVII



Fonte: Hilster (2011, p.14)

Discussões didáticas

O uso de fontes históricas voltadas para o ensino de matemática, apesar de raro em sala de aula, vem se desenvolvendo e aprimorando, e cada vez mais sendo visto como um método de aprendizagem pelos profissionais da educação, pois o professor como mediador entre o aluno e o saber

> [...] pode transformar essas fontes em ferramentas para demonstrar ao aluno de forma didática que a história é feita de vestígios deixados pelos homens do passado e que se constituem no material com o qual o historiador vai utilizar para compreensão de como determinadas sociedades se estabeleceram em determinados tempos/espaços (XAVIER, 2011, p. 641).

Portanto, o aluno, ao vivenciar uma prática escolar que inclua o recurso de fontes históricas pode compreender melhor os aspectos históricos e os conhecimentos matemáticos envolvidos na aula. A partir de um tratamento didático das fontes e instrumentos históricos, é possível desenvolver atividades para que este recurso possa ser utilizado no ensino de matemática com o objetivo de proporcionar uma aula interativa, facilitando na compreensão e construção do conhecimento matemático.

Com isso, é realizável desenvolver sequências didáticas para que este recurso possa ser utilizado como uma metodologia para o ensino de matemática. Por sua vez, as sequências didáticas são atividades estruturadas realizadas no ambiente escolar que são ligadas umas às outras, contendo objetivos e metodologias para que o aprendizado seja adquirido no decorrer de toda a aula estimada para um determinado conteúdo. De acordo com Teixeira e Passos (2013, p. 162), a sequência didática "é uma série de situações que se estruturam ao longo de uma quantidade prefixada de aulas. Devidamente estruturadas, essas situações têm como objetivo tornar possível a aquisição de saberes bastante claros, sem esgotar o assunto trabalhado."

Sendo assim, partindo da construção e uso do instrumento *staffe*, podem ser retiradas possíveis relações matemáticas que cheguem até a sala de aula. Através do passo a passo descrito pelo autor na elaboração do instrumento, notam-se conhecimentos geométricos que podem ser articulados com a prática para a mobilização de novos conceitos ou reorganização dos conceitos já existentes obtidos pelos alunos. A partir desses conhecimentos, podem-se construir sequências didáticas envolvendo conteúdos geométricos para a construção de um ângulo reto a partir da circunferência, como também os conceitos e classificações das retas paralelas e retas perpendiculares, bem como o manuseio de régua e compasso para estruturar geometricamente tais conhecimentos.

Considerações finais

Diante do descrito sobre os recursos advindos da História da Matemática, pode-se dela retirar muitas fundamentações e atividades a partir de aspectos históricos para possibilitar a construção do conhecimento por parte dos alunos. A História da Matemática fornece recursos metodológicos que possibilitam ao aluno compreender a evolução dos conceitos, fazendo-os perceber a matemática envolvida no cotidiano deles e a importância de estudarem essa ciência.

Com isso, da construção ao manuseio do instrumento *staffe*, percebe-se alguns aspectos que podem contribuir para a compreensão de conhecimentos geométricos tais como círculo, quadrante, ângulos, paralelismo, perpendicularismo, dentre outros que pode ser mobilizados através da articulação entre história e o ensino de matemática, dado que os instrumentos podem ser úteis "[...] não só como ferramentas, mas também como um objeto que constrói e incorpora conhecimentos em uma rede de relações" (CASTILLO; SAITO, 2012, p. 5).

Introduzir a História da Matemática em sala de aula não é uma tarefa fácil, pois requer um bom conhecimento e formação do professor para que haja segurança ao transmitir o conteúdo. Porém existem alguns métodos de inseri-la no ambiente escolar, podendo o professor aproveitar-se de um deles para utilizá-la com seus alunos. As fontes históricas, consideradas uma das formas de inserção da História da Matemática nas aulas, apresentada no capítulo, é um recurso que proporciona ao aluno conhecer a matemática mais a fundo, a sua origem e os feitos de pessoas que de alguma forma praticaram a matemática, assimilando assim as definições matemáticas estudadas atualmente. Além disso, as fontes históricas podem ser encontradas em livros, artigos, internet, o que facilita o trabalho do professor e dos alunos. A partir delas, o professor pode construir diversas atividades, dependendo do conteúdo que queira expor em sala.

Embora haja algumas dificuldades com o estudo, através de um tratamento didático nessas fontes e instrumentos históricos é possível mobilizar conhecimentos matemáticos, que podem ser aprofundados através de estudos e interesse do professor em querer trabalhar com a história da matemática no estabelecimento de ensino. Mesmo com tais dificuldades, o professor poderá atingir seus objetivos propostos, bastando procurar a melhor forma de agregá-la ao meio educacional.

Referências

BARONI, R. L. S.; TEIXEIRA, M. V. A investigação científica em história da matemática e suas relações com o programa de pós-graduação em Educação Matemática. In: SOUZA, A. C. C. de et al. **Educação Matemática:** Pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. Cap. 1. p. 164-171.

BRUYNS, W. F. J. M. **Sextants at Greenwich:** a catalogue of the mariner's quadrants, mariner's astrolabes, cross-staffs, backstaffs, octants, sextants, quintants, reflecting circles, and artificial horizons in the National Maritime Museum, Greenwich. New York: Oxford University Press, 2009. 353 p.

CASTILLO, A. R. M; SAITO, F. Um estudo preliminar sobre o quadrante triangular de John Browne: história e epistemologia na educação matemática. **Encontro de Produção Discente Pucsp/ Cruzeiro do Sul**, [s. l], v. 1, n. 1, p. 1-13, 01 dez. 2012.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989.

DAVIS, J. **The Seamans Secrets**. London. 1607.

GAMA, R. P.; FIORENTINI, D. Formação continuada em grupos colaborativos: professores de matemática iniciantes e as aprendizagens da prática profissional. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 11, n. 3, p.441-461, 2009. Quadrimestral.

HILSTER, N. **The Early Development of the Davis Quadrant**. 2011.

MARKHAM, S. C. R. **A life of John Davis, the navigator, 1550-1605**. New York: Dodd, Mead & Company, 1889.

PEREIRA, A. C. C.; BATISTA, A. N. de S.; SANTOS, A. G. dos; NOGUEIRA, R. S. Os báculos ao longo da história: alternativa didática para o ensino de matemática na formação de professores. In: MAIA, Marília; GUILHERME, Amsranon; CHARAPA, Francione (org.). **O Ensino de Matemática na Educação Contemporânea**: o devir entre a teoria e a práxis. Fortaleza: Quipá, 2021. Cap. 24. p. 356-371.

SAITO, F.; DIAS, M. S. Interface entre história da matemática e ensino: Uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação**, São Paulo, v. 19, n. 1, p.89-111, 2013.

SILVA, A. P. P. N. **A leitura de fontes antigas e a formação de um corpo interdisciplinar de conhecimentos:** Um exemplo a partir do almagesto de Ptolomeu. 2013. 100 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013. Cap. 3.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Zetetiké**, Campinas, v. 21, n. 39, p.155-168, jan. 2013. Semestral.

XAVIER, E. S. **Ensino e História:** O uso de fontes históricas como ferramentas na produção de conhecimento histórico. 2011.

CAPÍTULO 6

O clássico problema da trissecção de um ângulo presente na construção do instrumento náutico jacente no plano

Francisco Wagner Soares Oliveira

O objetivo deste trabalho consiste em propor atividades que abordem conceitos matemáticos mobilizados no clássico problema da trissecção de ângulo qualquer. Essa intenção, emerge de tentativas preliminares de construção do instrumento náutico jacente no plano[30], assim como também de uma ação formativa desenvolvida junto a futuros professores de matemática em formação inicial no ano de 2018 (OLIVEIRA, 2021).

Esses dois momentos evidenciam que para a construção do aparato, nos deparamos com o clássico problema da trissecção de um ângulo, particularmente na etapa em que é necessário dividir uma tábua circular **abcd** em 360 graus, como é costume [...]" (NUNES, 2008, p. 358)[31]. Na ação de cumprir essa instrução de Pedro Nunes (1502-1578)[32], nota-se que está incorporada a divisão de

30 O instrumento jacente no plano é um aparato voltado a determinação da altura do Sol acima do horizonte. Ele tem seu berço em uma abra em que Pedro Nunes traz algumas considerações e contribuições para a náutica do século XVI. Para mais detalhes confira Oliveira e Pereira (2021): "Sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578) na formação do professor de matemática

31 Para informações sobre esse costume, vide Oliveira e Pereira (2020): "Indícios do Costume Relacionado a Divisão da Circunferência em Seus 360 Graus presente na Fabricação do Instrumento Jacente no Plano de Pedro Nunes".

32 Pedro Nunes foi cosmógrafo-mor do reino de Portugal, por esse motivo dedicou-se a estudar alguns temas relacionados à navegação do século XVI. É nesse contexto que certamente veio a propor o instrumento jacente no plano. Para detalhes biográficos sobre Pedro Nunes, consulte

um ângulo em duas partes, em três partes e em 5 partes, em ângulos congruentes.

Diante do movimento do pensamento exigido para fazer a trissecção de um ângulo, e principalmente por enxergar nessa atividade um potencial para fomentar discussões e reflexões sobre alguns conceitos geométricos, é que aqui me dedico a propor algumas atividades sobre trissecção de um ângulo qualquer para a formação de estudantes da licenciatura em matemática, mesmo sabendo que em alguns casos ela só é possível por aproximações.

Porém, antes de apresentar as propostas de atividades como forma de expor os dados que as sustentam, abordo um pouco do instrumento jacente no plano a partir da obra *De arte atque ratione navigandi (1573)*, assim como algumas informações sobre as estratégias para trissecção de um ângulo que circulavam no século XVI.

O instrumento jacente no plano e a trissecção do ângulo

O instrumento jacente no plano é uma das propostas de Pedro Nunes que compõe o conteúdo que ele traz no sexto capítulo do segundo livro de sua obra, *De arte atque ratione navigandi* (1573). Capítulo e livro são nomeados respectivamente, por: "sobre os instrumentos com que se tomam as alturas e as distâncias dos astros; e sobre as regras e os instrumentos para descobrir as aparências das coisas tanto marítimas como celestes, partindo das ciências matemáticas".

Esses títulos dizem um pouco do instrumento jacente no plano, particularmente quando o quinhentista assinala para instrumentos com que se tomam as alturas dos astros e que no livro parte das ciências matemáticas. Isso porque a descrição de Pedro Nunes mostra que o instrumento tem como finalidade determinar a altura do Sol (um astro) acima do horizonte e, que ele é fruto de um efetivo exercício matemático, haja vista o lusitano se basear em

Leitão (2003): "Para uma biografia de Pedro Nunes: o surgimento de um matemático, 1502-1542".

proposições das matemáticas para sugerir três possíveis variantes para sua construção.[33] Em uma delas, ele assume a seguinte forma física (figura 1):

Figura 1: Instrumento jacente no plano

Fonte: Oliveira e Pereira (2021, p. 63)

Nessa configuração, assim como propõe Pedro Nunes[34], o instrumento é composto por uma tábua quadrada, sobre cujo limbo está uma circunferência graduada em 360 partes congruentes, uma reta tangente a ela e um triângulo retângulo isósceles, posto

33 Para informações e detalhes sobre as possíveis configurações nas quais o instrumento jacente no plano pode ser construído, vide Oliveira e Pereira (2021): "Sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578) na formação do professor de matemática".

34 A proposta do instrumento jacente no plano instruída por Pedro Nunes pode ser apreciada da página 358 a 360 da obra *De arte atque ratione navigandi* (2008), edição moderna da versão de 1573. Para uma discussão em detalhes de cada excerto, vide Oliveira e Pereira (2021): "Sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578) na formação do professor de matemática".

na perpendicular. Sobre essas partes do aparato, cabe destacar que a construção de cada uma envolve vários conhecimentos relacionados à geometria, especificamente, sobre construções geométricas.

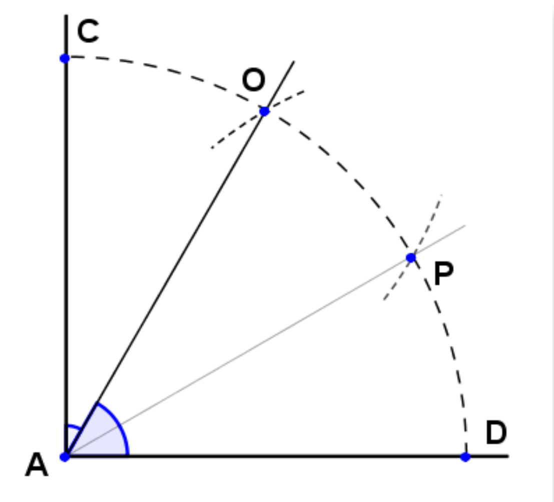
Como já assinalado na parte introdutória desse capítulo, aqui o foco está em um dos procedimentos necessários para a divisão da circunferência em 360 partes congruentes, em especial a trissecção de um ângulo. Ainda no século XVI, período em que foi proposto o instrumento jacente no plano, sabe-se que possivelmente como herança dos gregos antigos, o uso de régua não graduada e compasso para se fazer construções geométricas ainda era marcante. O compasso e régua também eram usados por artistas para elaboração de pinturas (EVES, 1992).

No que se refere à trissecção de um ângulo, uma repartição que era facilmente realizada corresponde a de um ângulo de 90 graus, ou seja, divisão de um ângulo reto em três ângulos congruentes. Uma alternativa tomada para tanto era a de traçar dois ângulos com “quantidades” iguais a 60 graus cada, que deviam ser construídos um a um, tendo como base um lado distinto do ângulo reto (REZENDE, QUEIROZ, 2008). Em outras palavras, tem-se a seguinte explicação e sua respectiva representação (figura 2):

> Seja o ângulo $\hat{A}$
> Com centro no seu vértice *A* descrevemos com qualquer raio o arco $\overset{\frown}{CD}$.
> Centrando agora em *D* com o mesmo raio cortemos o arco $\overset{\frown}{CD}$. no ponto *O*. Em seguida com o mesmo raio, façamos centro em *C* e cortemos $\overset{\frown}{CD}$. em *P*.
> Os pontos *O* e *P* unidos ao vértice *A* do ângulo em questão dividi-lo-ão em três partes iguais como queríamos.
> Imaginando *A* o centro de uma circunferência e *AC* o seu raio; temos que o segmento que une $\overline{OD}$ ou $\overline{PC}$ é o lado do hexágono inscrito (Núm. 200) (CARVALHO, 1958, p. 104).

Nesse caso, pode-se observar que o ângulo $\widehat{DAO}$ corresponde justamente à medida de 60 graus por ser um dos ângulos internos de um triângulo equilátero, pois é certo que um triângulo desse tipo possui seus três lados congruentes e, consequentemente, três ângulos congruentes. Assim, compreende-se que para essa trissecção, bastaria construir apenas um triângulo equilátero inscrito no ângulo reto, desde que ele tenha um lado comum a um dos lados congruentes do triângulo retângulo. Dessa forma, $\widehat{DAC}$ estaria dividido em dois ângulos, um de 30 graus e outro de 60 graus que, pelo traço de sua bissetriz, forneceria dois ângulos de 30 graus. Como representação para essa situação, tem-se (figura 2):

Figura 2 — Trissecção de um ângulo reto.



Fonte: Elaboração própria.

Pelo que se pode observar, a trissecção de um ângulo de 90 graus é facilmente realizada com régua não graduada e compasso. Porém, no caso específico da trissecção de um ângulo qualquer, sabe-se que ela não é possível de ser realizada apenas com régua não graduada e compasso, a não ser por processos de aproximação (REZENDE, QUEIROZ, 2008). "A primeira demonstração rigorosa da impossibilidade da trissecção de um ângulo dado qualquer com régua e compasso foi dada por Pierre Wantzel, em 1837 [...]" (EVES, 1992, p. 38).

Entretanto, no século XVI, circulavam algumas possibilidades por aproximação. Dentre elas, destacam-se três possibilidades: uma é atribuída a Arquimedes (Siracusa, 287 – c. 211 a.C.) que está associada a *neusis* ("tendência", "inclinação", "inserção"); outra, a Pappus (sec. IV d.C.), que faz uso de uma hipérbole[35]; a de Nicomedes (c. 240 a.C), que usa a curva Conchóide[36]; e a quarta atribuída a Hípias (425 a.C), quadratriz (EVES, 1992).

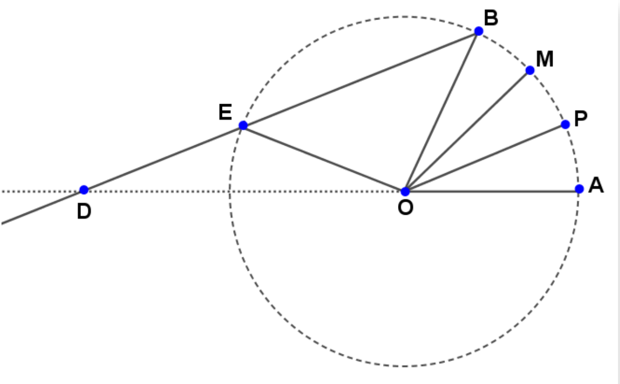
Na proposta de trissecção atribuída a Arquimedes, o primeiro procedimento é a construção de uma circunferência de raio arbitrário e de centro no vértice *O* do ângulo $\widehat{AOB}$, que tem os pontos *A* e *B* na intersecção com os vértices do ângulo $\widehat{AOB}$. Posteriormente, prolonga-se o diâmetro que passa pelo lado *AO* e marca-se sobre ele um ponto *D*, que deve ser um dos vértices com ângulos congruentes de um triângulo isósceles *DEO*, em que o lado *DE* seja igual a *OE*. Após observar as relações que se estabelecem com a construção desse triângulo, nota-se que $\widehat{ODE}$ =1/3 de $\widehat{AOB}$. Assim, para concluir a trissecção, basta traçar *OP* paralela a *DE* e posteriormente dividir $\widehat{POB}$ em duas partes.[37] A esse respeito, tem-se (figura 3):

35 Para informações, consulte Pinto (2010): "Os instrumentos náuticos de navegação e o ensino da geometria".

36 Para informações, consulte Eves (1992): "Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula GEOMETRIA".

37 Para mais informações, vide Pinto (2010): "Os instrumentos náuticos de navegação e o ensino da geometria"; e Eves (1992): "Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula GEOMETRIA".

Figura 3 — Trissecção de um ângulo qualquer $\widehat{AOB}$.



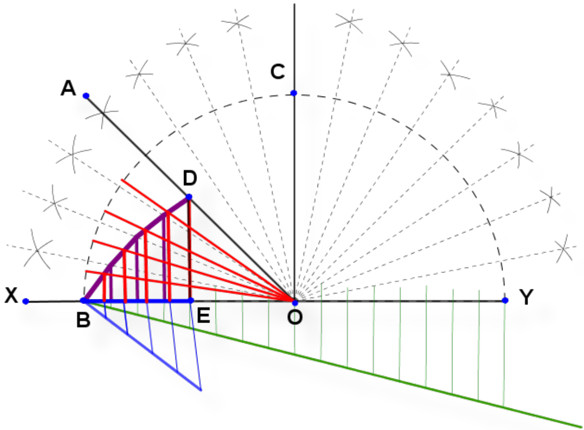
Fonte: Elaboração própria.

No caso da trissecção de um ângulo qualquer a partir do trabalho com a Quadratriz de Hípias, tem-se o seguinte exemplo prático de seu uso:

> Seja o ângulo $\widehat{XOA}$
> De um ponto qualquer do seu lado *XO*, *B* por exemplo, traça-se uma quadratriz. Essa curva vai cortar o lado *AO* do ângulo no ponto *D*.
> Por este ponto baixa-se uma perpendicular ao lado *XO*, determinando *E*. Divide-se agora *BE* no número de partes em que se deseja dividir o ângulo – no caso 5.
> Por esses pontos de divisão: 2, 3, 4, 5, e *E* levantam-se perpendiculares que cortarão a quadratriz em igual número de pontos. Estes pontos unidos ao vértice *O*, dão os ângulos resultantes da divisão de $\widehat{XOA}$ em 5 partes iguais (CARVALHO, 1958, p. 105-106).

Sobre essa possibilidade, tem-se a seguinte ilustração (figura 4):

Figura 4 — Repartição de um ângulo qualquer em partes congruentes pela quadratriz.



Fonte: Adaptado de Carvalho (1958).

Nesse caso, nota-se que a curva da quadratriz do ângulo $\widehat{XOA}$ está representada pela linha mais acentuada da cor lilás. Para sua construção, inicialmente, dividiu-se a semicircunferência em 16 ângulos congruentes a partir do traço de sucessivas bissetrizes; a esse procedimento correspondem as semirretas pontilhadas. Posteriormente, para localizar uma nova coordenada que possibilite determinar os pares ordenados da curva quadratriz com a aplicação do Teorema de Tales, repartiu-se o diâmetro BY em 16 segmentos congruentes, cuja ação está representada pelas semirretas em verde. Por fim, considerando o traço da curva apenas para o ângulo $\widehat{XOA}$, levantaram-se as perpendiculares em lilás que intersectam as divisões da semicircunferência realizada anteriormente, fornecendo, assim, os pontos da quadratriz.

Da curva em lilás, tem-se o segmento *BE*, e as paralelas em azul que o intersectam ilustram a aplicação do teorema de Tales para reparti-lo na quantidade que se deseja dividir o ângulo. Já as perpendiculares a *BE*, representadas em vermelho, intersectam a quadratriz, fornecendo os pontos em que se devem traçar as semirretas que repartem o ângulo $\widehat{XOA}$ em outros cinco congruentes.

Diante desses métodos para trisseccionar em partes congruentes um ângulo de 90 graus e qualquer ângulo dado, na sequência são propostas algumas atividades.

Propostas de atividades didáticas

Como forma de mobilizar alguns conhecimentos geométricos incorporados no clássico problema da trissecção de um ângulo, propomos três atividades voltadas à formação inicial do futuro professor de matemática. Como recursos necessários para desenvolver as propostas, indica-se régua não graduada e compassos, que foram os instrumentos clássicos para construções geométricas.

Esse bloco de atividade tem ainda como objetivo evidenciar que a trissecção de um ângulo reto pode ser facilmente realizada com régua não graduada e compasso. Contudo, a trissecção de um ângulo qualquer, a partir dos mesmos recursos, só é possível por meio de procedimentos de aproximação.

Atividade 1: trissecção de um ângulo de 90 graus em partes congruentes

Tipo de atividade: atividade individual. Conhecimentos prévios: é necessário saber manusear régua e compasso; e definição de circunferência, de diâmetro, de triângulo retângulo isósceles e de triângulo equilátero.

Objetivos da atividade:

a. Verificar que é possível trisseccionar um ângulo de 90 graus em partes congruentes, utilizando régua e compasso;
b. Mobilizar conceitos que compõem o significado de triângulo equilátero;
c. Construir e dividir um ângulo de 90 graus em partes congruentes.

Procedimentos:

a. Usando um compasso e régua, construa uma circunferência;
b. Divida a circunferência em quatro partes (quadrantes);
c. Tome um dos quadrantes para tentar reparti-lo em três ângulos congruentes;
d. A partir do compasso, tome o comprimento do lado do quadrante selecionado, e trace agora inicialmente usando como centro um dos dois pontos da circunferência que formam o arco de 90 graus, corte o arco mancando um novo ponto. Agora com centro no outro ponto que delimita o arco de 90 graus, faça um novo corte e marque o novo ponto;
e. Una os dois pontos encontrados no arco ao centro do quadrante, assim o ângulo de 90 graus estará dividido em três partes congruentes.

Tendo realizado a construção, reflita sobre as seguintes indagações:

a. Existem outras estratégias para trisseccionar um ângulo de 90 graus em partes congruentes?
b. A precisão da trissecção realizada é matematicamente aceitável? Justifique!

Atividade 2: trissecção de um ângulo agudo qualquer dado a partir da estratégia de Arquimedes

Tipo de atividade: atividade individual. Conhecimentos prévios: é necessário saber manusear régua e compasso; definição de circunferência, de diâmetro, de triângulo isósceles; e deve-se saber traçar retas paralelas e fazer a bissetriz de um ângulo.

Objetivos da atividade:

a. Mobilizar conceitos de circunferência, de arco de circunferência e de ângulos internos e externos de um triângulo;
b. Identificar que essa trissecção só é possível com régua "marcada", fato que transgride a restrição de que compasso e régua não deveriam ter escalas no período.

Procedimentos:

a. Construa uma circunferência de raio arbitrário e de centro no vértice *O* do ângulo $\widehat{AOB}$, que tenha os pontos *A* e *B* indicando o arco $\widehat{AB}$;
b. Prolongue o diâmetro que passa pelo lado *AO* e marque sobre ele um ponto *D*, que deve ser um dos vértices com ângulos congruentes de um triângulo isósceles *DEO*, em que o lado *DE* seja igual a *OE*.
c. Observe as relações que se estabelecem com a construção desse triângulo, em que se nota $\widehat{ODE}$=1/3 de $\widehat{AOB}$.
d. Trace *OP* paralela a *DE* e posteriormente dividir $\widehat{POB}$ em duas partes, marcando um ponto *M* na intersecção com a circunferência.

Tendo realizado a construção, reflita sobre as seguintes indagações:

a. Esse método é possível para fazer a trissecção de um ângulo qualquer maior que 90 graus?

Recorte histórico:

É pertinente acentuar que essa construção atribuída a Arquimedes só foi possível porque se usa um segmento de comprimento dado, o que fere a restrição de que compasso e régua não poderiam ter qualquer escala. O uso desse comprimento dado faz referência ao *neusis*, método que era recorrentemente utilizado pelos gregos.

Atividade 3: trissecção de um ângulo agudo qualquer dado a partir da Curva quadratriz atribuída a Hípias

Tipo de atividade: atividade individual. Conhecimentos prévios: é necessário saber manusear régua e compasso; definição de circunferência, de diâmetro, de teorema de Tales; e divisão de um segmento em *n* partes e traço de retas perpendiculares.

Objetivos da atividade:

a. Trisseccionar um ângulo agudo qualquer em 5 partes;
b. Mobilizar conceitos de circunferência, de arco de circunferência, do teorema de Tales e traço de bissetriz;
c. Identificar que essa trissecção só é possível com régua não graduada e compasso por meio de aproximações.

Procedimentos:

a. Seja um ângulo $\widehat{XOA}$ de uma circunferência com centro em *O*, dividiu-se a semicircunferência em 16 ângulos congruentes a partir do traço de sucessivas bissetrizes;
b. Para localizar uma nova coordenada, que possibilite determinar os pares ordenados da curva quadratriz, com a aplicação do Teorema de Tales, reparta o diâmetro BY em 16 segmentos congruentes;
c. Considerando o traço da curva apenas para o ângulo $\widehat{XOA}$, levante perpendiculares que intersectem as divisões da semicircunferência realizada anteriormente, fornecendo, assim, os pontos da quadratriz;

d. A partir da quadratriz, marque o segmento *BE*, que deve ser repartido em 5 partes, as quais representam a quantidade de ângulos congruentes que se quer dividir $\widehat{XOA}$;

e. Trace perpendiculares sobre o segmento *BE* a partir das divisões feitas no segmento;

f. Na intersecção das retas perpendiculares à *BE* com a curva quadratriz marcam-se os pontos, a partir dos quais posteriormente se deve traçar os seguimentos de retas que repartem o ângulo $\widehat{XOA}$ em outros cinco congruentes.

Tendo realizado a construção, reflita sobre as seguintes indagações:

a. Esse método é possível para fazer a trissecção de um ângulo qualquer maior que 90 graus?

A depender da intenção didática-pedagógica, entende-se que esse bloco de atividades pode ser trabalhado em algumas das disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, principalmente em uma disciplina de desenho geométrico ou outra similar.

Considerações finais

Pelo que se pode observar, o clássico problema da trissecção de um ângulo foi objeto de estudo de alguns estudiosos gregos, a quem são atribuídas algumas estratégias para a sua solução. Embora não seja possível realizá-lo com régua não graduada e compasso, entende-se que eles podem ser objetos de estudos em aulas de Licenciatura em Matemática.

As atividades aqui propostas assinalam que o potencial do problema de trissecção de um ângulo está não só na quantidade de conhecimentos geométricos que podem ser mobilizados e discutidos pelos estudantes, mas principalmente na possibilidade de trabalhar com diferentes conceitos de forma articulada.

Referências

CARVALHO, B. de A. **Desenho Geométrico**. Rio de Janeiro: Ao livro técnico, 1958.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática** para uso em sala de aula GEOMETRIA. São Paulo: Atual, 1992.

LEITÃO, H. Para uma biografia de Pedro Nunes: o surgimento de um matemático, 1502-1542. **Cadernos de Estudos Sefarditas**, Lisboa, v. 3, p. 45-82, 2003.

NUNES, P. Obras: ***De Arte Atque Ratione Navigandi***. vol. IV, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2008.

OLIVEIRA, F. W. S. Um primeiro olhar sobre a reconstrução do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes na formação do professor de matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 7, n. 20, p. 67–79, 2021. 2021.

OLIVEIRA, F. W. S.; PEREIRA, A. C. C. Indícios do Costume Relacionado a Divisão da Circunferência em Seus 360 Graus presente na Fabricação do Instrumento Jacente no Plano de Pedro Nunes. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 20, n. 39, p. 35-49, 7 out. 2020.

OLIVEIRA; F. W. S.; PEREIRA, A. C. C. **Sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578) na formação do professor de matemática**. Iguatú, CE: Quipá Editora, 2021.

PINTO, M. M. **Os instrumentos náuticos de navegação e o ensino da geometria**. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2010.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de. **GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA e construções geométricas**. São Paulo: Unicamp, 2008.

CAPÍTULO 7

O instrumento astrolábio náutico contido no tratado *Arte de Navegar* (1606) de Simão d'Oliveira utilizado para o ensino de geometria

Rebeca Oliveira Amarante

Os conhecimentos geométricos exercem papel formativo relevante na educação escolar, pois permitem que os estudantes desenvolvam o raciocínio visual, estimulem a cognição, possibilitando ainda a passagem do estágio das operações concretas para as abstratas. Assim, o conhecimento geométrico possibilita uma abordagem interdisciplinar e integrada aos diversos ramos da matemática (NOGUEIRA, 2015; SANTOS; OLIVEIRA, 2018).

Assim, devido a essa relevância no processo formativo dos indivíduos, houve a necessidade da inserção da Geometria nos documentos curriculares nacionais, como mais recentemente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que reconhece os conhecimentos geométricos como de suma importância para interpretação e resolução de problemas do mundo físico e das diferentes áreas do saber (BRASIL, 1997; OLIVEIRA, 2019).

Deste modo, é importante destacar os recentes estudos direcionados para a área da Geometria, dentre eles, podemos destacar os desenvolvidos por Caldatto e Pavanello (2015), Duarte e Patriota (2015), Santos e Oliveira (2018) e Pavanello, Costa e Verrengia (2020), os quais mencionam que a Geometria é pouco desenvolvida nas aulas da educação básica e lecionada por meio de métodos tradicionais e com metodologias e práticas pedagógicas inadequadas.

Tendo em vista a superação desta problemática e com a intenção de promover uma adequada construção acerca dos conhecimentos geométricos em sala de aula, na tentativa de tornar a geometria mais entendível, menos abstrata e mais interessante ao olhar dos estudantes pelos professores de matemática, desenvolveu-se este estudo. Deste modo, faz-se necessário adentrar na sala de aula com meios que auxiliem aos estudantes no entendimento adequado da Geometria.

É importante ressaltar que no âmbito da Educação Matemática têm-se desenvolvido pesquisas relacionadas a diversos recursos que objetivam realizar uma construção e aprendizado acerca dos conhecimentos matemáticos. A História da Matemática é um desses recursos, sendo uma possível ferramenta para ser utilizada em conjunto com as aulas expositivas. Ainda, dentro dessa área, existem alguns modos de inseri-la no ensino, dentre eles encontram-se o uso de textos históricas (SILVA; NASCIMENTO; PEREIRA, 2015). Pereira e Pereira (2015, p. 76) alegam que, "o uso de textos históricos na sala de aula pode promover a compreensão de conceitos matemáticos por meio de atividades que proporcionem aos alunos meios mais significativos para a aprendizagem".

Nesse intuito, Santos e Oliveira (2018) justificam a relevância da Geometria no âmbito escolar, argumentando que, sem compreendê-la, os indivíduos não desenvolvem adequadamente o pensamento geométrico ou raciocínio visual, e com déficits nessas habilidades eles dificilmente conseguirão solucionar as situações do cotidiano ao longo de suas vidas que forem geometrizadas.

Diante desse contexto, buscamos textos históricos que versassem acerca da geometria. Assim, dentre eles julgamos interessante o estudo e aprofundamento do tratado *Arte de Navegar* escrito em 1606 por Simão d'Oliveira, nele estando contido o instrumento astrolábio náutico, que por meio de seu uso, descrito no quarto livro dessa obra (livro quarto - o uso dos instrumentos náuticos e preceitos de navegar), verificamos a possibilidade de se desenvolver atividades didáticas em sala de aula voltadas para o ensino da geometria.

Partindo do objeto de estudo aqui delineado, o tratado *Arte de Navegar*, (1606) de Simão d'Oliveira, escolhemos uma metodologia qualitativa de caráter documental e bibliográfica, visto que estudamos um texto histórico do século XVII. Pois, de acordo com Kripka, Scheller e Bonotto (2015, p. 244), iremos desenvolver um "intenso e amplo exame de diversos materiais que ainda não sofreram nenhum trabalho de análise, ou que podem ser reexaminados, buscando-se outras interpretações ou informações complementares".

Uma breve descrição do tratado *Arte de Navegar* e do instrumento astrolábio náutico nele inserido – conteúdo histórico e matemático

A era das grandes navegações consolidou Portugal como a primeira grande nação europeia a estabelecer o maior império ultramarino nos territórios da África, da Ásia e da América. O que possibilitou esse grande feito, foram os domínios dos conhecimentos acerca das técnicas disponíveis e aplicadas aos problemas náuticos, o aperfeiçoamento, desenvolvimento e adaptações dos instrumentos náuticos para as navegações no oceano Atlântico, tais como; bússolas, quadrantes, balhestilhas, compassos, transferidores, réguas e o astrolábio náutico (AMARANTE; PEREIRA, 2021).

Logo, os primeiros tratados relacionados à esfera náutica começaram a surgir. Neles, continham saberes sobre astronomia, cartografia, cosmografia, meteorologia e pilotagem, bem como informações básicas para os que queriam aprender a arte de navegar, mas sobretudo, acerca do uso dos instrumentos náuticos (AMARANTE; PEREIRA, 2021).

Dentre todos os tratados relacionados às navegações portuguesas, o que mais nos despertou interesse foi o tratado do português Simão d'Oliveira (1606), que apresenta saberes acerca da navegação, da astronomia, da cartografia, da cosmografia, estando contido nele o instrumento astrolábio náutico. O tratado aqui estudado está dividido em quatro livros (Quadro 1). Essa obra encontra-se disponível na Biblioteca Nacional de Portugal (BNP), em formato digitalizado do tratado original *Arte de Navegar* (1606) estando consoante a ele, tendo como título: *Arte de Navegar*, de autoria de Simão d'Oliveira, cosmógrafo-mor, natural da cidade de Lisboa. Foi dirigido a Dom Pedro de Castilho, Bispo de Leiria, inquisidor-mor e vice-rei dos Reinos de Portugal. Em Lisboa, foi impresso por Pedro Crasbeeck, em 1606 (AMARANTE; PEREIRA, 2021).

Este estudo direcionou a atenção mais especificamente ao livro quarto do tratado, pois apresenta a relevância e os modos de uso dos instrumentos náuticos nele contido, tais como; a armila náutica, quadrante náutico, rosa da agulha e astrolábio náutico, sendo este último objeto de estudo desta pesquisa.

Quadro 1 - Descrição do tratado *Arte de Navegar* de autoria de Simão d'Oliveira.

LIVRO	TÍTULO DO LIVRO	CAPITULOS
Primeiro Livro	Os círculos da esfera artificial	16
Segundo Livro	Os ofícios dos círculos da esfera artificial	7
Terceiro Livro	A fabricação dos instrumentos náuticos	26
Quarto Livro	O uso dos instrumentos náuticos e preceitos de navegar	53

Fonte: Adaptado de Amarante e Pereira (2021)

Segundo Oliveira (2021) a partir de sua análise do que discorriam o livro terceiro e o livro quarto do tratado (Quadro 1), epistemologicamente, identificou-se conhecimentos sobre as operações aritméticas ou geométricas para o exercício adequado da fabricação, manuseio e uso dos instrumentos náuticos matemáticos descritos na *Arte de Navegar* (1606). A obra também contém noções relacionadas à astronomia (conhecimento dos polos e das estrelas), além de descrições acerca da necessidade do saber calcular a largura dos lugares, a altura dos polos, para que por meio do uso de instrumentos, como o astrolábio náutico, fosse possível ao navegante conseguir localizar-se em alto mar e conduzir sua embarcação.

De acordo com Simão d'Oliveira em seu tratado *Arte de Navegar* (1606), para que fosse possível a comunicação entre os homens separados uns dos outros pelas águas, e "caminhar pelos mares", haveria a necessidade de buscar novas invenções e artes. Deste modo, surge a arte de navegar, onde "tomando-se" (medindo-se) a altura do sol e das estrelas (o dia ou a noite como recurso facilitador) por meio do uso de instrumentos como o astrolábio náutico, era possível saber a altura do polo, ou ainda o cálculo da largura entre os lugares e a posição de localização do navegante para saber por onde seguir com sua embarcação.

No que se refere ao uso do instrumento astrolábio náutico, no livro quarto do tratado, o português Simão d'Oliveira segue descrevendo que para se medir a altura existem diversos instrumentos, sendo o mais comumente utilizado, o astrolábio. Deste modo, de acordo com a tradução realizada por Albuquerque (1970) do tratado *Arte de Navegar* (1606) e da obra de mesmo nome escrita pelo Padre Francisco da Costa, utiliza-se o instrumento da seguinte maneira:

> Vindo pois ao como se há-de proceder com ele para se tomar a altura do Sol, virar-se-á com um lado ao Sol, de sorte que entre o raio dele pelos buraquinhos mais pequenos das pínulas, para o qual se alevantará ou abaixará, segundo a necessidade o pedir; e tendo assim enfiado direitamente pelos buraquinhos o Sol, notar-se-á o grau que a linha da confiança ou ponta da dioptra amostra, porque os números de graus que tiver de sua linha do zénite, que é a que corta o astrolábio de alto abaixo, da qual o número de graus começam, essa será a distância que o Sol naquele tempo tem do zénite; o que lhe faltar para 90, será o que está sobre o horizonte. E por este modo se irá tomando a altura do Sol por intervalos enquanto for

> crescendo até se achar a maior, a qual se saberá quando tornar a diminuir; e a sobredita será a meridiana, com a qual se fará a conta, pelo modo que adiante diremos (ALBUQUERQUE, 1970, p. 129).

Destarte, de acordo com Saito (2015, p. 147), é possível, por meio do uso do astrolábio e seus quadrantes, "[...] realizar quatro maneiras de se medir a altura de um objeto quando a medida da base de um triangulo é conhecida e três outras quando não é conhecida".

Propostas de atividades didáticas

Nossa proposta é que, a partir do uso do astrolábio, algumas atividades de ensino possam ser elaboradas. A que proporemos a seguir é apenas uma sugestão, que poderá ser complementada mediante a necessidade dos professores. Ela enfocará principalmente conteúdos de trigonometria que é uma área da geometria, sendo direcionada aos alunos do 9º ano do ensino fundamental. Entretanto, o professor de matemática é livre para aplicá-la em qualquer outro nível que julgar necessário.

Para a realização da atividade, é preciso que o docente já possua o instrumento astrolábio construído para o seu uso em sala de aula. Ressaltamos que a atividade deverá ser realizada em trios.

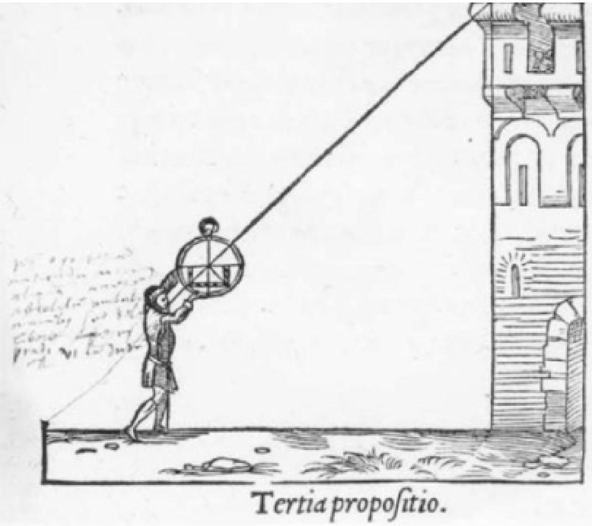
Atividade prática: mobilizando os conhecimentos matemáticos por meio do uso do astrolábio

O aluno deverá imaginar ser um navegador que está em um barco saindo do oeste do Cabo Carvoeiro, na cidade de Peniche, costa de Portugal, a caminho do Arquipélago das Berlengas, que é composto por um grupo de ilhas graníticas localizado no oceano Atlântico. Antes de iniciar sua viagem, o navegante (aluno) pesquisou um pouco mais sobre o arquipélado e descobriu que lá existe o Farol da Berlenga, que teve o início da sua construção no século XVIII a mando de Marquês de Pombal, mas só foi finalizado em 1840, ou seja, no século XIX. O Farol está ativo até os dias de hoje, entretanto atualmente ele funciona a energia solar. Trata-se de uma torre quadrangular de alvenaria, branca, com edifícios anexos, lanterna e varandim vermelhos.

A duração em média do trajeto citado acima é de aproximadamente 50 minutos. Entretanto, o navegante (aluno) está muito ansioso para conhecer o Arquipélago das Berlengas. Assim, ao avistar o Farol da Berlenga, utilizou o astrolábio para saber a distância que ainda restava dele até o Farol (figura 1).

1. O professor irá escolher um ponto de referência que simbolizará o Farol da Berlenga. Exemplo: a altura de um poste dentro as dependências do colégio.
2. O professor deverá estabelecer uma distância do trio ao "Farol da Berlenga".
3. O trio deverá utilizar o astrolábio para identificar o ângulo que irá se formar quando o instrumento estiver mirando o topo do "Farol da Berlenga". Lembre-se que a altura do astrolábio em relação ao solo, deverá ser levada em consideração.
4. Após conhecerem o ângulo formado, os alunos deverão mobilizar seus conhecimentos trigonométricos e descobrir a altura do "Farol da Berlenga".
5. Para auxiliar a problemática, o professor deverá disponibilizar uma fita métrica para que o trio identifique sua distância até o "Farol da Berlenga".
6. O docente deverá posicionar cada trio seguinte a uma distância diferente do trio anterior.

Figura 1 – Medindo a altura de um edifício por meio do uso do astrolábio.



Fonte: Winterburn (2005, p. s/f)

Orienta-se ao docente levantar alguns questionamentos ao decorrer da atividade, tais como:

1. Quais os conhecimentos trigonométricos serão mobilizados por meio do uso do astrolábio?
2. Os ângulos formados a partir do astrolábio são os mesmos?
3. Os ângulos obtidos por meio do uso do astrolábio são notáveis?
4. Apesar das distâncias dos trios em relação ao "Farol da Berlenga" serem diferentes, a altura sempre será a mesma? Explique.

Considerações finais

Ao longo desse estudo, foi possível verificar que a história da matemática pode favorecer o ensino desta disciplina e isso pode trazer ao professor e aos alunos um entendimento mais amplo dos conhecimentos geométricos, repercutindo assim em discursões e reflexões de suma importância para a adequada construção do saber matemático.

Por meio do uso do instrumento astrolábio náutico contido no tratado *Arte de Navegar* (1606), epistemologicamente é possível verificar conceitos fundamentais das matemáticas desta época relacionados à geometria (termos relativos a largura dos lugares e altura do polo), bem como à astronomia (termos voltados ao sol, polo e estrelas). Saberes esses que podem ser mobilizados em sala de aula para o ensino da Matemática.

Deste modo, nesse trabalho, nossa proposta foi utilizar o astrolábio como uma ferramenta didática em atividades voltadas para o ensino de trigonometria, sendo esta uma área da geometria. Esperamos que durante todo o processo de aplicação da atividade sugerida, o docente, ao elaborar e apresentar as diversas situações aos seus discentes, saiba estimulá-los a mobilizar os conhecimentos matemáticos incorporados no instrumento.

Referências

ALBUQUERQUE, L. Duas Tratados Inéditas do Padre Francisco da Costa. (Códice NVT/7 do National Maritime Museum). **Revista de Ciências do Homem da Universidade de Lourengo Marques**, v. 1, p. 169-402, 1970.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, v. 24, n. 1, p. 103-128, 2015.

DUARTE, V. de M. B.; PATRIOTA, M. do R. A. Investigando colaborativamente a práxis do ensino de geometria no ensino básico/superior**. Revista Diálogos**, n. 4, 2015.

KRIPKA, R. M. L.; SCHELLER, M.; BONOTTO, D. L. Pesquisa Documental: considerações sobre conceitos e características na Pesquisa Qualitativa. **CIAIQ**, [*s. l.*], v. 2, p. 243-247, 2015.

NOGUEIRA, C. A. **Ensino de geometria: concepções de professores e potencialidades de ambientes informatizados.** 155 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

OLIVEIRA, F. W. S. **Sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578) na formação do professor de matemática.** 200f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

OLIVEIRA, G. P. Um primeiro olhar de aspectos gerais do tratado a arte de navegar (1606) de Simão d' Oliveira. In: XIV SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 14., 2021, Uberaba. **Anais...** Uberaba: Sbhmat, p. 1-15, 2021.

OLIVEIRA, S. **Arte de Navegar**. Lisboa: Oficina de Pedro Crasbeeck, 1606.

PAVANELLO, R. M.; DA COSTA, L. P.; VERRENGIA, S. R. D. Geometria e Educação Infantil: Entre a Pesquisa, o Desenvolvimento de Materiais de Ensino e a Formação Continuada de Professoras. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, n. 3, p. 238-225, 2020.

PEREIRA, A. C. C.; PEREIRA, D. E. Ensaio sobre o uso de fontes históricas no ensino de matemática. **Rematec: Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Natal, v. 10, n. 18, p.65-78, 2015.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re) construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SANTOS, A. O.; DE OLIVEIRA, G. S. A prática pedagógica em geometria nos primeiros anos do ensino fundamental: construindo significados. **Revista Valore**, v. 3, n. 1, p. 388-407, 2018.

SILVA, I. C.; NASCIMENTO, J. S.; PEREIRA, A. C. C. Estudando equação do 1º grau por meio do uso de fontes históricas: o papiro de Rhind. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 2, n. 6, p. 37-48, 2015.

WINTERBURN, E. Using an Astrolabe. **Muslim Heritage**, 2005.

CAPÍTULO 8

A constituição de sequências didáticas face à articulação entre história da matemática e tecnologias digitais para a formação de professores de matemática

Gisele Pereira Oliveira
Ana Carolina Costa Pereira

Diante do cenário do século XXI, visualizam-se exigências presentes nos currículos de Matemática da educação básica, como as novas normalizações e orientações identificadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), levando a reflexão quanto às necessidades de adaptações para instituições de ensino superior e educação básica.

Essas mudanças no documento norteador brasileiro, BNCC, verificado em Brasil (2018), nos inquieta a observar que as alterações no currículo nacional exige adequações da formação de docentes quanto às variações a serem adaptadas no tripé que Pinheiro, Borges Neto e Pinheiro (2013) reforçaram por planejamento, recursos e metodologias. Essa formação pode ser vivenciada através de iniciativas de reformulações do currículo de licenciaturas em Matemática, tal como em momentos de extensão universitária em caráter continuado.

Com isso, à luz da BNCC e selecionando elementos destacados nesta em Brasil (2018) para o uso no ensino de conceitos matemáticos, contemplaremos nessa discussão a articulação da história da Matemática e tecnologias digitais na busca por promover a constituição de sequência didáticas a serem usadas na formação de professores.

Para isto, usaremos o tratado histórico de Oliveira (1606), intitulado por "A arte de Navegar", para coletar informações do contexto da navegação de Portugal do século XVII rumo às terras das riquezas, com o potente potencial didático destes elementos e do instrumento matemático Quadrante náutico para o ensino de conteúdos matemáticos para a formação de professores.

Desse modo, conforme ambientação, nossa inquietação foi: "Como elaborar sequências didáticas diante do contexto histórico do tratado 'A arte de Navegar' de Simão d'Oliveira de (1606) para formação de professores de Matemática da educação básica?", com o objetivo geral de "Produzir sequências didáticas para o ensino de Aritmética e Geometria a partir do contexto histórico presente na 'A arte de Navegar' de Simão d'Oliveira (1606) para a formação de Professores de Matemática".

Este estudo possui uma abordagem qualitativa, em que, segundo Goldenberg (2002), se defende e assume uma condução científica de investigação pautada na abstração subjetiva de elementos fundantes, identificados através da prática e realidade social humana. Além disso, as sequências didáticas produzidas serão amparadas conforme a metodologia Sequência Fedathi, como visualizado em Pinheiro, Pedrosa e Mendonça (2016), ao ressaltar os momentos didáticos de tomada de posição, maturação, solução e prova.

Quanto à organização deste capítulo, inicialmente tratará de elementos introdutórios, em seguida da descrição do tratado reforçando aspectos históricos e matemáticos do período do século XVII, o uso do Quadrante náutico presente neste documento, a elaboração e apresentação histórica de sequências didáticas para formação de professores de Matemática e algumas considerações finais.

Descrição do tratado – conteúdo histórico e matemático

Esse estudo apresentará alguns elementos contextuais e históricos presentes no tratado "A arte de Navegar" de Simão d'Oliveira (1606), contemplando conhecimentos da navegação do século XVII em Portugal.

Esse tratado é constituído por frontispício, dedicatória, carta ao leitor, proemio, licenças, privilégios, quatro livros e seus respectivos capítulos, taboadas e erratas. O autor foi Simão d'Oliveira, natural de Lisboa – Portugal, dirigido a Dom Pedro de Castilho, que era Bispo de Leiria e inquisidor-mor e vice-rei dos Reinos de Portugal, conforme verificado na Figura 1.

Figura 1: Frontispício do tratado a arte de navegar de Simão d'Oliveira

Fonte: Retirado de Oliveira (1606, s/p)

O tratado “A arte de Navegar” de Simão d’ Oliveira (1606), possui quatro livros com discussões em torno de assuntos da navegação do século XVII, cada um com 16, 7, 26 e 53 capítulos, respectivamente. Os livros foram intitulados: “Dos Círculos da Esfera Artificial”, “Dos ofícios dos Círculos da Esfera Artificial”, “Fábrica dos instrumentos náuticos” e “Uso de instrumentos náuticos e preceitos de navegar”.

Oliveira (2021) aponta que neste tratado se fez uso das matemáticas do século XVII, constituindo uma compreensão dos conhecimentos necessários à arte de navegar neste período, ressaltando a relevância de saberes quanto ao uso e fabricação de instrumentos matemáticos visualizados, que favoreciam um exercício da navegação rumo às terras das riquezas.

Entre as matemáticas do século XVII, como Aritmética, Geometria, Astronomia e Música, identificou-se uma predominância da utilização da Astronomia. Oliveira (2021) também destaca as sucessivas orientações no tratado quanto à navegação por meio do sol ou das estrelas, pois o conhecimento neste contexto para o cálculo da distância entre os lugares e a altura eram os procedimentos capazes de revelar aos pilotos e tripulantes suas localizações em alto mar.

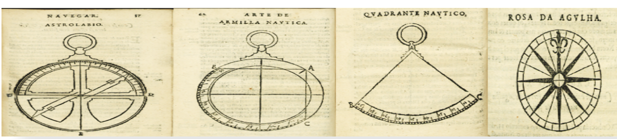
Além deste destaque à Astronomia, percebidos através de Oliveira (1606) e Oliveira (2021), também se percebeu a ocorrência do uso da Aritmética e Geometria em relação ao cálculo destas medidas anteriormente reforçadas e a manipulação e fabricação eficiente de instrumentos presente no tratado.

Entre os instrumentos relatados e apresentados quanto ao uso e fabricação, Oliveira (1606) mostra quatro principais, Astrolábio, Armilla Náutica, Quadrante Náutico e Rosa da Agulha, de acordo ao visualizado na Figura 2. Esses instrumentos eram alguns dos recursos que auxiliavam o ofício da navegação, mas vale sinalizar que não se limitava a estes, tal como quando Oliveira (1606) esclarece que para navegar precisavam-se das cartas de marear, que eram roteiros de navegação, com informações sobre os itinerários e suas respectivas localizações; a agulha náutica, que correspondia a um relógio universal, espécie de bússola orientadora e algum instrumento matemático para o cálculo de suas localizações.

Ainda se identifica, quando se debruça sobre outros referências que conversam acerca da navegação, Oliveira (1606), Pimentel (1819) e Randles (1985), que para além de instrumentos, cartas de marear e a agulha náutica/ relógio universal, que um recurso determinante para o ofício da navegação correspondia à observação.

Para Oliveira (1606), Pimentel (1819), Randles (1985) e Oliveira (2021), a observação estabelecida no decorrer das rotas marítimas eram informações complementares extremamente relevantes à navegação, pois nestes momentos se identificavam aspectos importantes quanto aos itinerários estabelecidos. Ainda à luz de Oliveira (1606), Pimentel (1819) e Randles (1985), se vê que as cartas de marear possuíam imprecisões, o que poderia desencadear perigos nos trajetos marítimos, sendo um dos recursos favoráveis a suprir essa lacuna a observação da flora, fauna e demais elementos identificados no decorrer dos caminhos.

Figura 2: Alguns instrumentos apresentados na arte de navegar

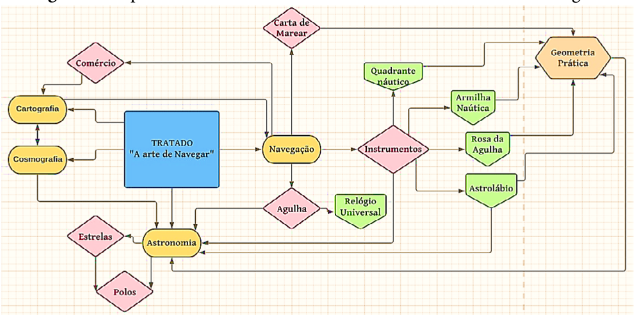


Fonte: Oliveira (1606, p. 57-77)

Desse modo, através de tais conhecimentos, a leitura flutuante do tratado "A arte de Navegar" de Oliveira (1606) trouxe aspectos que auxiliaram a constituição contextual da narrativa ofertada acerca da navegação do século XVII e os respectivos conhecimentos intrínsecos a esta. Nesse intuito, consoante verificado, observou-se que os assuntos principais verificados contemplam a Navegação, Astronomia, Cartografia e Cosmografia, além das demais matemáticas do período.

Em Oliveira (2021) se vê que a Navegação era promovida pelo uso da agulha náutica/relógio universal, cartas de marear/roteiros e itinerários de rotas marítimas e instrumentos matemáticos (Astrolábio, Armilla Náutica, Quadrante Náutico e Rosa da Agulha) decorrente de compreensões quanto ao uso e fabricação destes, a partir de conhecimentos provenientes da Geometria prática do período.

Figura 3: Mapa conceitual da leitura flutuante do tratado "A arte de navegar"



Fonte: Oliveira (2021, p. 617)

Além dos elementos identificados no mapa conceitual do contexto do tratado acerca das particularidades peculiares à Navegação, como observado em Oliveira (2021), percebemos ainda na leitura flutuante do tratado que realizamos que havia um percurso necessário a ser estabelecido, havia a necessidade de apropriação do saber navegar por meio das estrelas. Essa compreensão se daria através dos polos, estrelas polares e notáveis, na possibilidade de como calcular a distância e altura entre os lugares à noite, através das estrelas.

Vale ressaltar que Oliveira (1606) enfatiza a insatisfação de se navegar recorrentemente com o uso do sol, mas verifica-se também que ele aponta que em dias de chuva ou nublados as nuvens cobrem o sol, sendo inviável a navegação para aqueles pilotos que só possuíam a expertise para tal exercício com o sol por referência. Sinaliza ainda que dias de navegação eram perdidos pela falta de conhecimento em navegar à noite, orientados apenas pelas estrelas.

Com essas reflexões, vislumbrou-se aspectos provenientes do contexto, da história e da episteme do período, correspondente as rotas comerciais de navegação de Portugal rumo às terras das riquezas, como Oliveira (1606) relata. E consoante às características decorrentes de questões axiológicas, matemáticas e epistemológicas, se vê as necessidades do período quanto à otimização dos itinerários marítimos, o uso e fabricação de instrumentos e a fragilidade dos roteiros presentes nas cartas de marear, fornecidas aos pilotos pelos cosmógrafos-mor.

Com isso, faremos uma apresentação de elementos introdutórios com a sinalização de variáveis de investigação neste capítulo acerca da produção de sequências didáticas à luz do tratado "A arte de Navegar" de Oliveira (1606) e a discussão do contexto histórico e matemático que transitava neste, constituindo a seguir uma atividade para a formação de professores de Matemática que em outras ocasiões podem ser adaptadas para a educação básica.

Atividades didáticas

Diante das concepções constituídas e através de documentos primários e secundários que abordavam uma discussão sobre navegação, segundo Oliveira (1606), Pimentel (1819), Randles (1985), Pereira (2000) e Oliveira (2021), observamos elementos que podem ser bem aproveitados na articulação entre história da Matemática e tecnologias digitais para a formação de professores de Matemática.

Para isto, iniciamos caracterizando nossas pretensões de constituições de atividades didáticas consoante a metodologia Sequência Fedathi, como visto em Pinheiro, Pedrosa e Mendonça (2016), estruturadas em quatro momentos, tomada de posição, maturação, solução e prova.

Dessa maneira, pautados nestes períodos didaticamente planejados, iniciamos a descrição das sequências didáticas, amparadas na metodologia assinalada e no tripé destacado por Pinheiro, Borges Neto e Pinheiro (2013) caracterizado por planejamento, recursos e metodologia.

Essa atividade é destinada à formação de professores de Matemática, em que a relação entre os sujeitos e saber/conhecimento será executada com a interação entre professor formador, professores participantes e acesso ao saber/conhecimento. Vale destacar que alterações podem ser promovidas, estabelecendo, consoante ao tratamento didático, as ações entre professor formador, alunos e saber/conhecimento.

Tomada de posição: aliando a história ao ensino de Matemática

Neste momento didático promovido conforme Pinheiro, Pedrosa e Mendonça (2016), destacado por tomada de posição, ressaltamos inicialmente um momento de reflexões quanto a elementos históricos do contexto do tratado, usados nesta prática de ensino de história da Matemática à luz da *A arte de Navegar*, de Oliveira (1606).

Sequência didática:

1. O professor deverá realizar uma breve contextualização acerca da arte de navegar no século XVII em Portugal. Nesta ocasião, pode-se fazer uso de elementos abordados na caracterização contextual histórico matemática neste capítulo, no segundo tópico.
2. Em seguida, o professor formador deverá orientar os discentes (professores participantes) quanto aos con-

flitos em calcular a distância e altura entre os lugares por meio do sol ou estrelas. Após contextualizar, para promover reflexão quanto às distinções dos cálculos em relação ao sol ou as estrelas, explane uma taboada de estrelas notáveis visualizadas no tratado de Oliveira (1606), de acordo com a figura 4.

Figura 4: Taboada das declinações de estrelas notáveis

Taboada das declinações de 24. notaueis eſtrellas fixas no 8. ceo.

Nomes das Eſtrellas.	G. declinações	M. declinações	Partes da declinação	grandezas.
A eſtrella Polar.	86.	9	S	3
Arcturo.	22.	51	S	1
Aza direita do Coruo.	17.	6	A	3
A reſplandecente da Hydra.	4.	7	A	2
A Lucida do olho do Touro.	15.	57	S	1
A mais auſtral da Libra.	14.	1	A	2
A mais auſtral do Golfinho.	23.	45	S	3
Cão maior.	15.	53	A	1
Cão menor.	5.	56	S	1
Coração de Leão.	13.	45	S	1
Coração de Scorpião.	24.	57	A	2
Cauda de Leão.	15.	26	S	1
Cauda do Cyrne.	44.	8.	S	2
Cauda da Balea.	29.	44.	A	3
Cabeça de Leão.	21	45	S	2
Cabeça dos Gemeos.	32.	6.	S	2
Cabeça de Meduſa.	40.	3	S	2
Cabeça de Hercules.	15.	14	S	3
Spiga da Virguem.	8.	57	A	1
Hombro direito de Orião.	6.	21	S	1
O Canabo da nao Argos.	52.	35	A	1
Olho de Touro.	17.	56	S	3
Pè eſquerdo de Orião.	9.	7	A	1
Ventre da Balea.	12.	0	A	3

Fonte: Retirado de Oliveira (1606, s/p)

1. A seguir, o professor formador deverá fazer uso de um trecho do tratado, de acordo com os destaques atribuídos na figura 5, de forma a discutir com todos os envolvidos neste momento didático, sobre a natureza dos conhecimentos identificados neste recorte e quais as reflexões didáticas que emergiram dessa leitura?

Figura 5: Trecho avaliado do tratado a arte de navegar

"Até aqui tratamos como por meio do Sol e instrumentos, declaramos se poderia saber de dia a altura do Polo, ou largura dos lugares, onde o navegante se acha com sua *nao*; mas por quanto acontece faltar algumas vezes o Sol por dias inteiros, encobrindo as nuvens de tal sorte que o nao, podemos ver aparecendo nos de noite as estrelas, se necessário ensinemos também como por elas se alcançará o mesmo, o qual além da razão apontada nos servirá para quando nos quisermos mais certificar em que nos fazemos pelo Sol, o saibamos também observar as estrelas". f. 113 - 114

Fonte: Adaptado os destaques a partir de Oliveira (1606, p.113-114)

1. O professor deverá sinalizar a reflexão dos termos evidenciados no trecho, para apropriar da situação identificada neste recorte, tal como elementos contextuais, a serem preenchidos no Quadro 1.

Quadro 1: Informações decorrentes da investigação presente no trecho do tratado "A arte de navegar"

Termo investigado no trecho	Natureza do conhecimento matemático identificado	Reflexões didáticas que emergiram na leitura
Saber de dia a altura do Polo ou largura dos lugares/ Instrumentos		
Sol e estrelas		
Ensinemos/ Certificar		

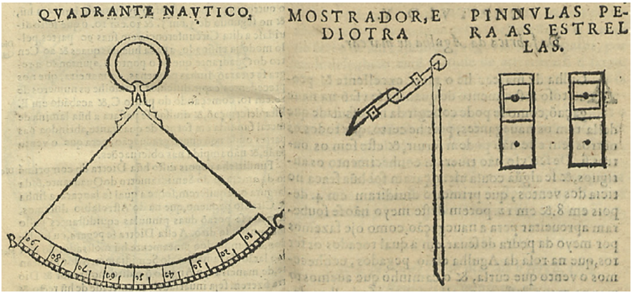
Fonte: Elaborado pelas autoras

A maturação como momento didático de experimentação da articulação entre história e ensino de Matemática

Após os momentos didáticos de tomada de posição, com base no contexto do tratado usado, apresenta-se o instrumento selecionado na *A arte de navegar* de Oliveira (1606), entre Astrolábio, Quadrante náutico, Armilla náutica e Rosa da agulha. Nesta ocasião, selecionou-se o Quadrante náutico, por identificar possibilidades didáticas para articulação entre história da Matemática e tecnologias no ensino de conceitos aritméticos e geométricos.

1. O professor formador deverá apresentar o instrumento matemático quadrante náutico, suas partes e possibilidades de uso, para a construção deste no ambiente digital do GeoGebra. Para familiarização, se começa por explicar suas partes de acordo com o visto na Figura 6.

Figura 6: Quadrante náutico e ferramentas de suporte contidas neste



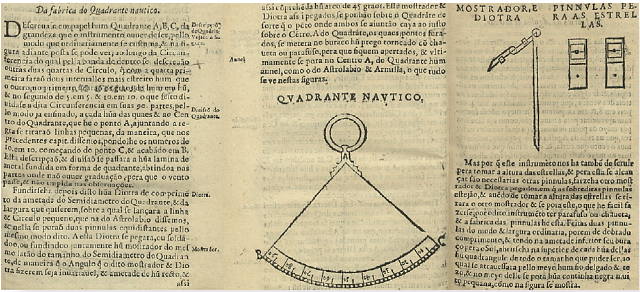
Fonte: Adaptado os destaques a partir de Oliveira (1606, p.64-65)

A solução de problemas para reflexões didáticas

Nesta ocasião, o professor formador orientará os professores participantes/ discentes sobre a construção do Quadrante náutico através do software GeoGebra.

1. Necessitará baixar o software *GeoGebra classic 5*, em seguida, fornecer o trecho de orientações da construção e orientações em relação às graduações do quadrante, para que possam associar que este corresponde a ¼ de uma circunferência construída.

Figura 7: Orientações da fabricação do Quadrante náutico



Da fabrica do Quadrante nautico.

DEſcreuaſe em papel hum Quadrante A, B, C, da grandeza que o inſtrumento ouuer de ſer, pello modo que ordinariamente ſe cuſtuma, & na figura adiante poſta ſe pode ver; ao longo da Circunferencia do qual pella banda de dentro ſe deſcreuão outras duas quartas de Circulo, q̃ com a quarta primeira farão dous interuallos mais eſtreito hum que o outro, no primeiro ſicarão os graos de hum em hũ, & no ſegundo de 5. em 5. & 10. em 10. o que feito diuidaſe a dita Circunferencia em ſuas 90. partes, pello modo ja enſinado, a cada hũa das quaes & ao Centro do Quadrante, que he o ponto A, ajuntando a regra ſe tirarão linhas pequenas, da maneira, que nos precedentes capit. diſſemos, pondolhe os numeros de 10. em 10. começando do ponto C, & acabãdo em B. Eſta deſcripção, & diuiſão ſe paſſara a hũa lamina de metal fundida em forma de quadrante, abrindoa nas partes onde não ouuer graduação, pera que o vento paſſe, & não impida nas obſeruações.

Deſcripção do Quadrante Vejaſe a figura.

Diuiſão do Quadrante.

Fundirſeha depois diſto hũa Diotra de comprimẽto da ametade do Semidiametro do Quadrante, & da largura que quiſerem, ſobre a qual ſe lançara a linha & Circulo pequeno, que na do Aſtrolabio diſſemos, & nella ſe porão duas pinnulas equidiſtantes pello meſmo modo dito. A eſta Diotra ſe pegara, ou ſoldãdoo, ou fundindoo juntamente hũ moſtrador do meſmo latão do tamanho do Semidiametro do Quadrante, de maneira q̃ o Angulo q̃ o dito moſtrador & Diotra fizerem ſeja inuariauel, & ametade de hũ recto, & aſsi cõprehẽda hũ arco de 45 graos. Eſte moſtrador & Diotra aſsi pegados ſe ponhão ſobre o Quadrãte de ſorte q̃ o põto onde ambos ſe aiuntão caya ao juſto ſobre o Cẽtro. A do Quadrãte, os quaes pontos furados, ſe metera no buraco hũ prego torneado cõ chaueta ou parafuſo, pera que fiquem apertados, & vltimamente ſe pora no Centro A, do Quadrante hum annel, como o do Aſtrolabio & Armilla, o que tudo ſe ve neſtas figuras.

Diotra.

Moſtrador.

Annel

QVADRANTE NAVTICO.

A

B

C

90 80 70 60 50 40 30 20 10

MOSTRADOR, E DIOTRA

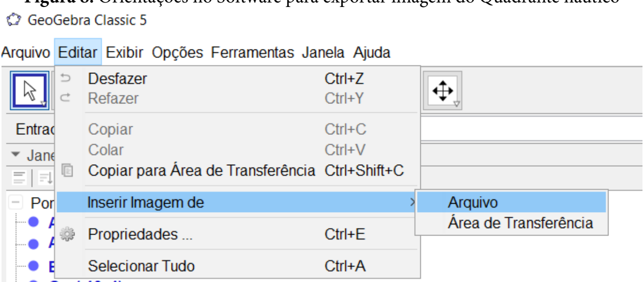
PINNVLAS PERA AS ESTRELLAS.

Mas por q̃ eſte inſtrumẽto nos ha tambẽ de ſeruir pera tomar a altura das eſtrellas, & pera eſta ſe alcançar ſão neceſſarias otras pinnulas, farzeha otro moſtrador & Diotra pegados, em q̃ as ſobreditas pinnulas eſtejão, & auẽdo de tomar a altura das eſtrellas ſe tirara o otro moſtrador & ſe pora eſte, o que he facil fazerſe, por o dito inſtrumẽto ter parafuſo ou chaueta, & a fabrica das pinnulas he eſta. Feitas duas pinnulas do modo & largura ordinaria, porem de dobrado comprimento, & tendo na ametade inferior ſeu buraco pera o Sol, abrirſeha na ſuperior de cada hũa dellas hũ quadrangulo de todo o tamanho que puder ſer, ao qual ſe atraueſſara pello meyo hum fio delgado & tezo, & no meyo delle ſe pora hũa continha negra muito pequana, como na figura ſe moſtra.

Fonte: Oliveira (1606, p.63-65)

1. Em seguida, com o uso do software, oriente selecionar nos ícones de ferramentas, a opção **exibir**- **inserir imagem de** - arquivo.

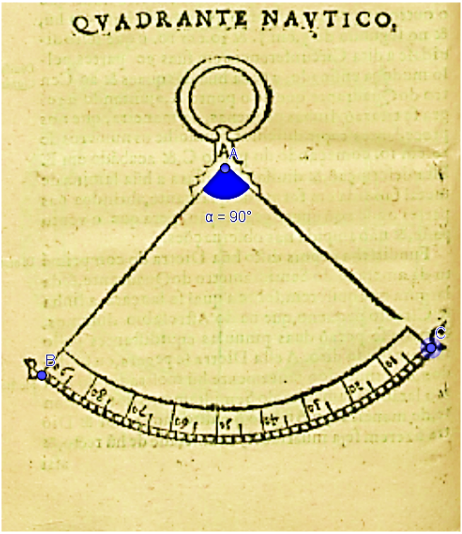
Figura 8: Orientações no Software para exportar imagem do Quadrante náutico



Fonte: Produzido pelas autoras

1. Exportando a imagem do quadrante no GeoGebra, no ponto A, insira-o no ícone ponto, em continuidade, na opção ângulo, selecione três pontos, constituindo o ângulo **α**, fruto de **BÂC**. Caso os pontos estejam com outras denominações, com o botão direito do mouse, clique em propriedades e em básico, altere a letra que o representa, como visualizado na Figura 9.

Figura 9: Quadrante náutico no GeoGebra com mobilização de angulação



Fonte: Produzido pelas autoras

1. Após a criação, proponha uma discussão acerca do ângulo **α**, **BÂC**. Podendo abordar demais ângulos internos e externos aos pontos **A, B, C**.

Proponha os questionamentos:

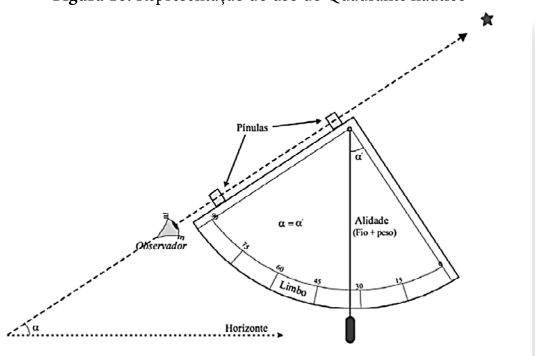
- Quais os ângulos internos aos pontos A, B, C nas extremidades do quadrante?
- Qual a justificativa de α resultar em 90º?
- Qual a relação dessa medida de α com as graduações das nove partes entre B e C?
- Cada parte corresponde a quanto em unidade de medida? Por quê?

Provando concepções assinaladas para validação de conhecimentos

Após a tomada de posição, maturação, solução na contextualização de elementos históricos e na inserção da tecnologia presente no software GeoGebra, o professor formador teve a oportunidade de levantar inquietações relevantes quanto à articulação da história com as tecnologias.

1. Assim, com base nestes aspectos, é chegado o momento de formalizar o uso do quadrante, seu manuseio, conforme a utilização de informações vistas na Figura 10.

Figura 10: Representação do uso do Quadrante náutico



Fonte: Retirado de Pereira (2000)

1. Diante do contexto formalizado e experimentado, o professor poderá apontar situações problemas para uso do Quadrante náutico, para validar os conhecimentos apropriados através da articulação entre história da Matemática e tecnologias digitais.
2. Além disso, deverá verificar quais os demais conteúdos matemáticos que emergiram através da manipulação do Quadrante náutico no GeoGebra.

Considerações finais

Em face aos estudos apresentados e investigados neste capítulo, observa-se que para a elaboração de sequências didáticas a partir do contexto histórico do tratado *A arte de navegar* de Simão d'Oliveira (1606), foi necessária uma análise pontual do texto histórico, na expectativa de se constituir um contexto do período, tal como as particularidades da navegação de Portugal deste período e os desafios visualizados.

Ainda se percebeu que para o alcance do objetivo geral de "Produzir sequências didáticas para o ensino de Aritmética e Geometria a partir do contexto histórico presente na 'A arte de Navegar' de Simão d'Oliveira (1606) para a formação de Professores de Matemática", foi preciso a transposição didática de elementos da história para o ensino e da história para o cenário digital do GeoGebra. Esse percurso foi viabilizado com base na metodologia Sequência Fedathi, que orientou e estruturou didaticamente os momentos a serem experimentados na formação de professores de Matemática.

Essa constituição de sequências didáticas face à articulação entre história da Matemática e tecnologias digitais para a formação de professores de Matemática nos mostra a importância da sustentação neste trajeto do tripé planejamento, recursos e metodologias.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/ SEB, 2018. 600 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer uma pesquisa qualitativa em Ciências sociais. 6. Ed. Rio de Janeiro: Record, 2002.

OLIVEIRA, G. P. Um primeiro olhar de aspectos gerais do tratado a arte de navegar (1606) de Simão d'Oliveira. In: XIV Seminário Nacional de História da Matemática (XIV SNHM). **Anais [...].** Minas Gerais, 2021.

OLIVEIRA, S. de. ***Arte de navegar.*** Lisboa: Oficina de Pedro Crasbeeck. 1606.

PEREIRA, J. M. M. **Experiências com Instrumentos e Métodos Antigos de Navegação**, Lisboa, Academia de Marinha, 2000.

PIMENTEL, M. ***Arte de navegar em que se ensinam as regras práticas, e os modos de cartear, e graduar a balestilha por via de número e muitos problemas úteis a navegação e Roteiro das viagens e costas marítimas de Guiné, Angola, Brazil, Indias, Ilhas Orientais e Ocidentais.*** Novamente emendado e acrescentado muitas derrotas. Lisboa: Tipografia de Antonio Rodrigues Galhardo. 1819.

PINHEIRO, A. C. M.; BORGES NETO, H.; PINHEIRO, T. S. M. Quando e como utilizar o Ambiente Computacional para o Ensino de Conceitos Matemáticos: uma proposta de organização do trabalho docente. *In:* SANTOS, A. N.; ROGÉRIO, P. (Orgs.). **Currículo:** diálogos possíveis. Fortaleza: Edições UFC, 2013. p. 149-164.

PINHEIRO, A. C. M.; PEDROSA, V. N. M.; MENDONÇA, A. F. Uma proposta metodológica do uso do ambiente computacional como recurso didático para o ensino de conceitos matemáticos baseados na Sequência Fedathi. *In:* Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM). **Anais [...]** São Paulo, 2016.

RANDLES, W. G. L. Portugueses and Spanish attemps to measure longitude in the 16 th century. **Vistas in astronomy**, v.28, p. 235-241, France, 1985.

CAPÍTULO 9

O tratado Lilavati (1150) para o ensino de multiplicação

Dianara Figueirêdo Freire

A matemática é uma ciência construída a partir das necessidades de diversas culturas, por exemplo a grega, romana, indiana, europeia, chinesa etc. Nesse contexto, a história da matemática mostra que várias civilizações desenvolveram diferentes tipos de adições, subtrações, multiplicações e divisões com números naturais, sendo que no século XXI aparece somente um desses como forma de um algoritmo para os educandos aprenderem seus passos, sem refletir sobre ele.

Essas operações são essenciais para que os alunos avancem nas demais temáticas presentes nos currículos de matemática, que se encontram entre as habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Dessa maneira há a necessidade de desenvolver orientações didáticas visando a que os alunos compreendam, interpretem e resolvam problemas envolvendo esses conceitos matemáticos.

Dessa maneira, neste capítulo, voltamos nosso olhar para a multiplicação de números naturais, visto que "a multiplicação [...] é uma habilidade essencial para estudantes que se preparam para a vida no mundo matemático do século XXI, pois ela possibilita ao aluno uma ferramenta importante na resolução de problemas do cotidiano (PEREIRA; LIMA, 2016, p. 90).

Diante desse cenário, precisamos adentrar a sala com meios que auxiliem aos alunos no entendimento da multiplicação, conduzindo-os a assimilar as ideias presentes nela, pois, "muitas crianças, ainda hoje, apreendem a matemática como algo difícil e, se tratando da multiplicação, sentem dificuldade em utilizar-se desses cálculos para obter resultado" (PIRES; ABRANTES; BORBA, 2013, p. 90).

Com vista a superar esses entraves que existem na compreensão dos alunos sobre a multiplicação, recorremos à história da matemática, uma área que coopera para a compreensão da construção do conhecimento matemático e ainda é evidenciado como um repositório de materiais que podem ser utilizados em atividades para a sala de aula. Dentre esses recursos, podemos citar os textos históricos, concordando com Pereira e Pereira (2015, p. 76) ao ressaltarem que, "o uso de textos históricos na sala de aula pode promover a compreensão de conceitos matemáticos por meio de atividades que proporcionem aos alunos meios mais significativos para a aprendizagem".

Nesse cenário, buscamos documentos históricos que versassem sobre métodos de multiplicação, onde apareceu textos indianos, entre eles citamos o tratado Lilavati, escrito em 1150 por Bhaskara II, que apresenta em um de seus capítulos cinco métodos distintos de resolver problemas de multiplicação. Assim, através de documentos como esses, é possível que alunos identifiquem "os princípios envolvidos no conceito de multiplicação buscando compreendê-los além do empírico, para proporcionar a formação do pensamento teórico" (GIL; ARRAIS, 2021, p. 78).

Ao realizar um estudo mais aprofundado nesse texto, percebemos que ele pode ser propício a uma aplicação dentro da sala de aula, promovendo uma discussão sobre os conceitos multiplicativos. Assim, esse capítulo terá como objetivo discutir os métodos de multiplicação proposto por Bhaskara II em seu tratado Lilavati (1150), propondo atividades para o ensino de multiplicação.

Dessa forma, delinearemos orientações didáticas pautadas no capítulo 4 do tratado de Lilavati, para o que usaremos a versão *Lilavati of Bhaskaracarya: A Teatrise of Mathematics of Vedic*

Tradition, uma tradução para o inglês produzida por Patwardhan et al. (2006).

No que se refere ao estudo do tratado Lilavati, utilizamos uma abordagem qualitativa, descritiva, pautada em uma pesquisa documental, que se conecta com o que pretendemos realizar, ou seja, "intenso e amplo exame de diversos materiais que ainda não sofreram nenhum trabalho de análise, ou que podem ser reexaminados, buscando-se outras interpretações ou informações complementares" (KRIPKA; SCHELLER; BONOTTO, p. 244, 2015).

Lilavati e a multiplicação

O tratado *Lilavati* é um tratado indiano do século XII, escrito por Bhaskaracarya ou Bhaskara II e foi desenvolvido na região norte da Índia. No que se refere aos aspectos contextuais dessa região estavam a "agricultura, arquitetura, manufatura e comércio amplamente desenvolvidos" (PLOFKER, 1993, p. 7)[38]. Essas características podem ser averiguadas em alguns dos 120 problemas matemáticos contidos nos 34 capítulos (Quadro 1) desse tratado.

Quadro 1 - Tradução dos capítulos de Līlāvatī of Bhāskarācārya...

Título do Capítulo	**Quant. de versos**
1 - Definições e Tabelas	9
2- Colocar valores de dígitos	2
3- Adição e subtração	2
4- Métodos de multiplicação	4
5- Divisão	1
6- Métodos de encontrar quadrados	3
7- Raiz quadrada	2
8- Métodos para encontrar o cubo	4
9- Raízes cúbicas	2

38 [...] show extensively developed agriculture, architecture, manufacture, and trade.

10- Oito operações em frações	7
11- Adição e subtração de frações	2
12- Multiplicação de Frações	2
13- Divisão de Frações	2
14- Quadrados, cubos, raízes quadradas e raízes cúbicas de Frações	2
15- Oito regras relativas a zero	4
16- Processo reverso	3
17- Para encontrar uma quantidade desconhecida	9
18- Método de transição	2
19- Transição quadrada	8
20- Equação Quadrática	8
21- A regra de três	5
22- Proporção inversa	5
23- A regra de cinco	6
24- Regras para trocas	2
25- Juro simples	21
26- Combinação	5
27- Progressões (séries)	18
28- Mensuração	82
29- Volume	10
30- Corte de madeira	4
31- Volume de uma pilha de grãos	4
32- Sombras	10
33- Pulverização	17
34- Concatenação (Permutação, partições)	12
Índices de versos	
Índice do assunto	

Fonte: Patwardhan, Naimpally e Singh (2006).

Nesse trabalho, focaremos o capítulo 4[39] em que Bhaskara II expõe cinco regras para a resolução da multiplicação de números naturais, a saber: método direto, método da divisão, método de fator, método de lugar e método da adição e subtração. Nesse contexto, o método direto consiste em primeiro multiplicar o número equivalente às unidades do multiplicando pelo multiplicador, depois multiplicar o algarismo referente às dezenas pelo multiplicador, e assim por diante, até chegar ao último número do multiplicando, e depois basta somarmos os produtos das multiplicações para obter o resultado final. Então, para multiplicar abc x d, por exemplo, multiplicaríamos a x d = e, b x d = f e c x d = g, então o produto seria a soma: e + f + g.

Podemos perceber semelhanças com o nosso algoritmo atual. Patwardhan *et al.* (2001) ressaltam que esse modo era mais propício quando o multiplicador era pequeno, porque eles gravavam tabelas. Em seguida, apersenta-se um segundo modelo de fazer a multiplicação, o método da divisão, Bhaskará explicita dizendo: "divida o multiplicador em duas partes convenientes, multiplique o multiplicando por cada uma das duas partes e some os resultados"[40] (PATWARDHAN *et al.*, 2001, p. 13).

Com isso, se tivermos que multiplicar 35 por 25, divida o 25, por exemplo, em 20+5. Desde modo, multipliquemos esses dois números pelo nosso multiplicando, que é 35. Com isso, teremos 20 x 35= 700 e 5 x 35 =175. Portanto, basta somar os resultados para obter o produto da multiplicação, ou seja, 35 x 25 = (20 x 35) + (5 x 35) = 700 + 175 = 875.

O terceiro algoritmo é apontado por Bhaskara como "método de fator". Em seu texto, ele explica dizendo que "se o multiplicador for um número composto, fatorá-lo. Em seguida, multiplique por um fator e o resultado pelo segundo fator e assim por diante"[41]

39 Para informações dos demais capítulos e problemas verificar o artigo de Freire e Pereira (2021).

40 Split the multiplier into two convenient parts, multiply the multiplicand by each of the two parts and add the results.

41 If the multiplier is a composite number, factor it. Then multiply by one factor and then the result by the second factor and so on.

(PATWARDHAN *et al.*, 2001, p. 13). É importante frisar que um número composto é aquele que pode ser escrito como produto da multiplicação de números primos.

Bhaskara ainda cita como exemplo o número 45 como multiplicador. Ele afirma que basta multiplicar o multiplicando por 9 e depois o resultado por 5 (PATWARDHAN *et al.*, 2001). Com isso, se tivermos 12 x 45, teremos que multiplicar 12 x 9 = 108, e após multiplicar esse resultado por 5, isto é, 108 x 5 = 540, teremos que 12 x 45 = 540. Dessa maneira, generalizando, para multiplicarmos a por b, b sendo o multiplicador e um número composto, fatore b. Sendo a fatoração de b = c x d x e, multiplique a x c = f, depois faça: f x d = g e g x e. Nesse contexto, teremos a x b = g x e.

O quarto é o método de lugar. O texto fornecido por Bhaskara diz o seguinte: “multiplique por cada dígito do multiplicador separadamente e **escreva o resultado em cada caso em seu devido lugar**. Em seguida, adicione todos os resultados”[42] (PATWARDHAN *et al.*, 2001, p. 13, grifo nosso). Percebemos semelhanças desse modo com o algoritmo primeiro, mas a parte grifada não aparece no método direto, não explica onde cada um vai ficar. Bhaskara não deixa explícito que lugar é esse, mas (PATWARDHAN *et al.*, 2001) ao fazer seu comentário, informa que isso se refere, por exemplo, ao multiplicarmos o algarismo referente as dezenas. O resultado é deslocado uma casa para esquerda, como pode ser visto no algoritmo atual abaixo, na multiplicação de 432 por 32

$$\begin{array}{r} 432 \\ \underline{32} \\ 864 \\ 1296* \end{array}$$

42 Multiply by each digit of the multiplier separately and write the result in each case under its proper place. Then add all the results.

Então, o autor menciona que o lugar * não é mencionado porque deveria ser entendido pelos leitores. Esse algoritmo merece mais investigações a fim de ver um exemplo no qual Bhaskara o utilizava, contudo deixaremos para trabalhos futuros, visto que demandará mais tradução do tratado.

O quinto algoritmo apresentado por Bhaskara II é o método da adição ou subtração. Observe o texto exposto pelo autor: "Adicione qualquer número conveniente ao multiplicador e multiplique pelo resultado. Em seguida, multiplique pelo número adicionado e subtraia este produto do anterior. Em vez de adicionar um número conveniente, também se pode usar a subtração"[43] (PATWARDHAN *et al.*, 2001, p. 13). Então multipliquemos 32 x 18, adicione 2 ao multiplicador 18. Com isso deve-se multiplicar 32 x 20 = 640 e 32 x 2 = 64. Portanto, tem-se 32 x 18 = (32 x 20) – (32 x 2) = 640 – 64 = 576.

Propostas de atividades didáticas

Com vista a explorar os métodos expostos na seção anterior, sugerimos que os professores explorem atividades propostas a seguir para que o aluno reflita sobre a construção do conhecimento matemático, principalmente sobre os processos que estão sendo mobilizados ao executar uma multiplicação. Com isso, ao elaborarmos as atividades, nos pautamos na seguinte competência da BNCC,

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 268).

43 Add any convenient number to the multiplier and multiply by the result. Then multiply by the added number and subtract this product from the previous one. Instead of addition of a convenient number one can subtraction too.

Além disso, a BNCC ainda ressalta, na habilidade EF06MA03, que o aluno deve "resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles [...]"(BRASIL, 2018, p. 301). Nesse cenário, observamos que é essencial que o discente da educação básica, manipule as operações com os números naturais, compreendendo seus conceitos.

Apesar da habilidade anterior se referir ao 6º ano do ensino fundamental, o docente é livre para aplicá-la em qualquer nível que os alunos tenham dificuldade na multiplicação com números naturais, ou mesmo podem ser inseridas na formação de futuros professores de matemática e pedagogia, visto que esses precisam repensar na matemática que possuímos atualmente. Com isso, segue-se as atividades, ressaltando que a atividade 1 é feita em dupla e a atividade 2 em trio.

Atividade 1: Explorando o método direto e o método da divisão

Em Ujjain na Índia, em uma fazenda chamada Ishala existe a casa do senhor Francisco, que mora com sua esposa, Aurora, e seus dois filhos: João e Lucas. Em seu fazenda, Francisco cria várias espécies de animais, como: pavão, ganço, abelhas. Certo dia, Francisco teve que vender 57 gansos e foi em busca de um comprador.Encontrou Bhaskara, um comerciante da cidade, que ficou de visitar sua fazenda para ver os animais, e dizer o preço que seria cada um. Alguns dias depois, Bhaskara foi até o criadouro de gansos e só encontrou os dois filhos de Francisco, que tinha ido colher algumas frutas, então o comerciante disse que daria 32 reais em cada animal. Todavia João e Lucas ouviram seu pai dizer que ele não podia apurar menos que 2.280 reais nesses gansos, pois senão teria prejuízo. Mas João e Lucas não sabiam fazer a conta de como chegar ao preço total dos gansos. Contudo, lembraram que seu pai tinha um livro chamado Lilavati, que expunha as regras para se fazer esses processos. Então Lucas chamou sua mãe e pediu-lhe que servisse um café a Bhaskara, enquanto eles decidiam se a compra era satisfatória. Dessa maneira, ao abrir o livro, encontrou dois métodos, que apresentamos no Quadro 2 abaixo:

Quadro 2 - Métodos de Lilavati

Método direto	Primeiro multiplique o dígito na posição da unidade do multiplicando pelo multiplicador, depois o dígito na casa dos dez e assim por diante até o último dígito na extrema esquerda.
Método da divisão	divida o multiplicador em duas partes convenientes, multiplique o multiplicando por cada uma das duas partes e some os resultados

Fonte: Patwardhan, Naimpally e Singh (2006).

Então João pegou o método direto e Lucas o método da divisão para ver quem faria primeiro. Vamos um ajudar o João e outro o Lucas para ver quais processos estão envolvidos nesses métodos? E responda o seguintes questionamentos.

01. Algum dos métodos é parecido com o nosso atual? Explique por quê.
02. Mostre como vocês fizeram o cálculo proposto no problema, e compare os dois métodos.
03. Quais as principais diferenças desses métodos? Os dois chegaram ao mesmo resultado?

Atividade 2: Método de lugar; Método de fator; Método de adição e subtração

No rio Ganges estava acontecendo uma disputa matemática, quem ganhasse levaria uma estátua do rei Visnus para casa. Em um sábado, era dia de três temidos estudantes das matemáticas disputarem, eles se chamavam: Bhakaracarya, Bramagupta e Mahavira. Os três passaram a noite elaborando métodos de resolver multiplicações. Veja os que foram apresentados no dia da disputa no quadro a seguir:

Quadro 3: Métodos apresentados na disputa

Método de Fator	Se o multiplicador for um número composto, você deve fatorá-lo. Em seguida, multiplique por um fator e o resultado pelo segundo fator e assim por diante
Método de lugar	multiplique por cada dígito do multiplicador separadamente e escreva o resultado em cada caso em seu devido lugar
Método de adição e subtração	Adicione qualquer número conveniente ao multiplicador e multiplique pelo resultado. Em seguida, multiplique pelo número adicionado e subtraia este produto do anterior. Em vez de adicionar um número conveniente, também se pode usar a subtração

Fonte: Patwardhan, Naimpally e Singh (2006).

Ao chegar o dia, propôs-se aos estudiosos que trocassem os métodos entre si, de modo que nenhum ficaria responsável pela sua regra. Em seguida, solicitou-se aos estudiosos que resolvessem a multiplicação de 34 x 45 com o método que tinham em mãos. Agora façam o que se pede:

01. Separe entre vocês, um método para cada um e resolva a multiplicação.
02. Resolva a mesma multiplicação pelo nosso método atual.
03. Discuta com seus colegas as diferenças dos métodos utilizados no debate para o nosso atual.

Considerações finais

No decorrer desse trabalho, notamos que a história da matemática pode propiciar ricos recursos para a sala de aula, direcionando discursões e reflexões sobre a construção do conhecimento matemático. No capítulo, notamos um pouco da Matemática indiana, mas necessariamente um registro deixado por Bhaskara II, que tem uma gama de conhecimentos que podem ser atrelados ao ensino de Matemática.

Nesse contexto, deixamos aqui algumas atividades para o ensino de multiplicação e esperamos que sirva de subsídios para professores atuantes discutirem essa tão importante operação matemática, e os mesmos, ao lerem esse capítulo possam readaptar essas atividades às suas realidades e explorar a matemática e cultura indiana.

Com isso, ressaltamos aqui que essas atividades podem ser discutidas na formação de discentes da licenciatura em matemática ou pedagogia com vista a expandir a história da matemática como fornecedora de recursos e oportunizar aos graduandos a reflexão sobre os conceitos contidos na multiplicação.

Portanto, como perspectivas futuras, desejamos aplicar esses aparatos fornecidos nesse artigo na formação de professores e na educação básica, com vista a discutir a multiplicação em seus diversos aspectos. Dessa forma, ainda estudaremos mais esses métodos aqui apresentados, e também o tratado Lilavati, a fim de construir uma interface entre história e ensino de matemática, proposta por Saito (2013).

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

GIL, M. L. E.; ARRAIS, L. F. L. A multiplicação e o ensino: um estudo a partir das proposições de Davydov. **Colloquium Humanarum**, Presidente Prudente, v. 18, p. 77-85, 2021.

KRIPKA, R. M. L.; SCHELLER, M.; BONOTTO, D. L. Pesquisa Documental: considerações sobre conceitos e características na Pesquisa Qualitativa. **CIAIQ**, [*s. l.*], v. 2, p. 243-247, 2015.

PATWARDHAN, K. S.; NAIMPALLY, S. A.; SINGH, L. S. **Lilavati of Bhaskaracarya**: A Teatrise of Mathematics of Vedic Tradition. New Delhi: Motilal Banarsidass, 2001.

PEREIRA, A. C. C.; LIMA, T. S. Processo de multiplicação em algumas culturas. **Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco**, [*s. l.*], v. 05, ed. 1, p. 97-110, 2016.

PEREIRA, A. C. C.; PEREIRA, D. E. Ensaio sobre o uso de fontes históricas no ensino de matemática. **Rematec: Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Natal, v. 10, n. 18, p.65-78, 2015.

PIRES, M. J. S.; ABRANTES, N. N. F.; BORBA, V. M. L. Matemática e multiplicação: dificuldades e novos olhares em torno deste ensino. **Revista Principia**, [*s. l.*], n. 23, p. 87-94, 2013.

PLOFKER, K. **Mathematics in Índia**. Estados Unidos: Princeton University Press, 2008.

SAITO, F.; DIAS, M. S. **Interface entre história da matemática e ensino**: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. Ciência & Educação, Bauru, v. 19, n. 1, p. 89-111, 2013.

CAPÍTULO 10

Uma proposta de atividade a partir do tratado *Haidao Suanjing* para a formação de professores de matemática

Claudiana Oliveira de Sousa

As pesquisas em história da matemática voltada para o estudo de tratados e instrumentos estão em expansão no Brasil[44]. Pesquisadores buscam compreender o uso da história e de que forma contribui para a formação dos professores e aprendizagem dos alunos. Segundo Santos (2007), o estudo da história da matemática possibilita reavaliar e compreender o processo de evolução do conhecimento, investigando os obstáculos ao longo do processo de construção do saber matemático.

De acordo com Santos (2007), um dos obstáculos envolvendo o ensino de matemática é a falta da contextualização, que seria possível por meio da história. Logo, o uso da história da matemática é relevante como um complemento para essa contextualização do ensino, em que o aluno não seja apenas um memorizador, mas, possa desenvolver suas próprias percepções e assim reutilizar alguns conceitos e saberes para resolver os diversos problemas que surgem no cotidiano.

O ensino contextualizado vai mostrando as conexões existentes entre conhecimento e o cotidiano. Por exemplo, a Geome-

44 Batista (2018), Pereira (?, 2019, 2021), Saito (2015)
BATISTA, A. N. de S.; PEREIRA, A. C. C. A balhestilha (1603) como um instrumento matemático para o estudo de medidas na formação de professores de matemática. **Revista Acta Scientiarum**, v. 43, e48188, 2021.

tria é conhecida como estudo do espaço, e na maioria das vezes os alunos não conseguem associar ou resolver problemas semelhantes envolvendo situações diárias, seja um simples cálculo do volume de uma cisterna a calcular o desconto de uma roupa no *shopping*. Portanto, atividades realizadas em sala de aula que já foram vivenciadas pelos alunos ou se aproximam de contextos cotidianos têm mais chances de compreensão e de indagações.

Somem-se a isto os elementos históricos presentes na história da matemática como os tratados, os instrumentos, figuras, objetos que podem suscitar conhecimentos e conceitos matemáticos da vivência de outros povos envolvendo diversas culturas.

Desse modo, olhando para a formação de professores e o conhecimento mobilizado no tratado histórico chinês, o *Haidao Suanjing*, oriundo da restauração e compilação de outros tratados, é evidente a importância para a compreensão dos aspectos matemáticos e a construção do saber a partir das vivências práticas.

Portanto, este capítulo traz uma proposta de atividade para uma análise do problema cinco do tratado *Haidao Suanjing*, do chinês Liu Hui do século III. Esse tratado é composto por nove problemas práticos sobre a medição de altura, largura e profundidade usando polos e *gnomon*, além disso, são cálculos de locais inacessíveis. O estudo é uma revisão bibliográfica e documental de caráter qualitativo, e usa como fonte principal para o desenvolvimento da atividade o livro *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*, de 1999, de Kangshen, Crossley e Lun.

Para Köche (2011, p. 122) um estudo bibliográfico busca a explicação de determinado problema a partir da literatura cientifica existente. "O objetivo da pesquisa bibliográfica, portanto, é o de conhecer e analisar as principais contribuições teóricas existentes sobre um determinado tema ou problema [...]". A seguir apresentamos alguns aspectos matemáticos do tratado *Haidao Suanjing*, objeto de estudo para a atividade.

Aspectos matemáticos do tratado *Haidao Suanjing*

Segundo Swetz (1992) o tratado *Haidao Suanjing*, também conhecido como *Sea Island Mathematics Manual*, foi escrito pelo chinês Liu Hui no século III, como complemento às falhas do clássico os *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*. Além disso, foi Li Chenfeng, com ajuda do governo (602-670), que:

> [...] publicou *Shibu Suanjing* (十 部 算 經, 656), a coleção de dez trabalhos matemáticos, ele incluiu *chongcha* como um livro separado e chamou-o de *Haidao Suanjing* (海島 算 經). *Chongchashu* (重 差 術) ou *chongbiaofa* (重 表 法) em *Haidao Suanjing* (海島 算 經) é um método de levantamento com polos duplos (表). Como em outras obras matemáticas tradicionais na China, Liu Hui não incluiu a prova matemática para seu *chongchashu* em seu *Haidao Suanjing.* A prova matemática de *chongchashu* foi bem ilustrada em *Xugu Zhaiqi Suanfa* (續 古 摘 寄 算法, 1275) em *Yang Hui Suanfa* (楊輝 算法, 1274-1275)[45] (SA; HEE; IL, 2019, p. 260 tradução nossa).

De acordo com Kangshen, Crossley e Lun (1999), o *Haidao Suanjing* também ficou conhecido como *Regra das diferenças duplas*, e o próprio Liu Hui (Séc. III) havia deixado em seu prefácio que:

> [...] escrevi a *Regra das Diferenças Duplas*, com alguns comentários, de modo a facilitar nossa busca pelo significado original. Isto está anexado ao Capítulo sobre Triângulos Retângulos. A medição da altura envolve dois polos, e medição de profundidade, dois gnomons. Se outro ponto for adicionado, deve-se observar três ve-

45 published Shibu Suanjing (十部算經, 656), the collection of ten mathematical works, he included chongcha as a separate book and named it Haidao Suanjing (海島算經). Chongchashu (重差術), or chongbiaofa (重表法) in Haidao Suanjing (海島算經) is a method of surveying with double poles (表). As in the other traditional mathematical works in China, Liu Hui did not include the mathematical proof for his chongchashu in his Haidao Suanjing. The mathematical proof of chongchashu was well illustrated in Xugu Zhaiqi Suanfa (續古摘寄算法, 1275) in Yang Hui Suanfa (楊輝算法, 1274–1275). (SA; HEE; IL, 2019, p. 260).

> zes; uma quarta observação é necessária se o ponto adicional não estiver no mesmo plano que os outros pontos (KANGSHEN; CROSSLEY; LUN, 1999, p. 54, tradução nossa).[46]

Como descrito no trecho do prefácio, os nove problemas do tratado necessitavam do uso de alguns instrumentos como: corda ou linha, gnomon e polos. Batista, Pontes e Pereira (2021, p. 16) desenvolveram uma atividade sobre um dos problemas do *Haidao Suanjing*, em que enfatizam que são sobre agrimensura e "[...] que envolvem a resolução de problemas práticos." Segundo as autoras, "o documento não tinha nenhuma finalidade pedagógica de ensinar um conteúdo matemático, mas de instruir os estudiosos do período na resolução de problemas envolvendo medições." Para Swetz (1992) e Kangshen, Crossley e Lun (1999), a estrutura dos problemas foi mantida conforme as fontes antigas seguindo a ordem, problema, resposta e método. Veja no quadro a seguir uma síntese dos problemas.

Quadro 1: Discussão do tratado *Haidao Suanjing*

Problemas	Objetivo
1. Sobre uma ilha	Calcular a altura de uma ilha e a que distância está do polo.
2. Sobre um pinheiro na colina	Calcular a altura do pinheiro e a que distância está à colina do polo.
3. Sobre uma cidade murada	Calcular o [comprimento do] lado da cidade quadrada e a que distância a cidade está do polo.
4. Sobre a profundidade de um vale	Calcular a profundidade de um vale.

46 [...] have written the Rule of Double Differences, with some comments, so as to facilitate our search for the original meaning. This is appended to the Chapter on Right-angled Triangles. Height measurement involves two poles, and depth measurement two gnomons. If another point is added, we ought to observe thrice; a fourth observation is needed if the additional point is not in the same plane as the other points (KANGSHEN; CROSSLEY; LUN, 1999, p. 54).

Problemas	Objetivo
5. Sobre um edifício	Calcular a altura de um edifício visualizado a partir de uma montanha
6. Sobre um rio	Calcular a largura da foz de um rio.
7. Sobre visualizar água a partir de um abismo.	Calcular a profundidade da água.
8. Sobre visualizar um rio a partir de uma montanha	Calcular a largura de um rio.
9. Sobre visualizar uma cidade a partir de uma montanha	Calcular a largura e o comprimento de uma cidade.

Fonte: Kangshen, Crossley e Lun (1999, p. 539 – 558).

No quadro 1, apresentamos os objetivos dos problemas. Cada problema necessita de uma ou mais visualização para obter-se uma resposta; inclusive, Kangshen, Crossley e Lun (1999, p. 525, tradução nossa) informam que:

> Liu observou os objetos duas ou mais vezes. No processo desses cálculos, ele aplicou diferenças de lados correspondentes de triângulos retângulos duas vezes, de modo que o algoritmo especial foi chamado de diferenças duplas (congcha).47

O *congcha* usado por Liu Hui, descrito nos seus problemas, é estudado e algebrizado por outros matemáticos, inclusive está presente em um clássico anterior, o *Zhoubi suanjing.* Esse método era conhecido na China, Índia e pelos muçulmanos, e usado para o cálculo de distâncias inacessíveis. Veja uma generalização a seguir:

> [...] a altura H de um objeto inacessível deve ser determinada. Para determinar H, é necessário colocar dois polos de uma altura conhecida h verticalmente no solo,

47 To solve the nine problems in the sea island liu observed the objects two or more times. In the process of this computations he applied differences of corresponding sides of right-angled triangles twice so the special algorithm was called double differences (congcha). (KANGSHEN; CROSSLEY; LUN, 1999, p. 525).

> em linha com o objeto a uma distância D conhecida. A altura h e a distância D são teoricamente arbitrárias, mas quanto maiores forem mais precisos serão os resultados. Depois que os polos são configurados, os comprimentos das sombras que eles projetariam se o Sol estivesse no objeto inacessível são medidos como S_1 e S_2. Assim, os comprimentos $S_1, S_2,\ h$ e D são todos conhecidos (COOKE, 2005, p. 246, tradução nossa).

Este exemplo do *congcha* acima é parecido com o método instrucional de Liu Hui presente no tratado os *Nove capítulos sobre a Arte da Matemática*, principalmente no capítulo nove, que contém o *Haidao Suanjing,* mas não faz referência à sombra do sol, apenas a ideia é a mesma que a usada por Liu Hui, por exemplo, para se encontrar a altura de um edifício:

> [...] tomando a diferença entre os comprimentos do *gu* inferior e superior como divisor. Multiplique a distância entre os dois gnomos pelo comprimento do *gu* inferior. Divida o produto pela altura do *gou.* Multiplique o quociente pela altura do polo pequeno como dividendo. Divida para obter a altura do edifício. (KANGSHEN; CROSSLEY; LUN, 1999, p. 540, tradução nossa).

Portanto, segundo o Cooke (2005), Liu Hui pode tê-lo chamado de método da *diferença dupla* (*congcha*), porque surge da "diferença $H-h$ obtida dividindo *Dh* pela diferença $S_2 - S_1$", ou melhor, da diferença entre altura resultante da divisão entre diferenças do comprimento.

Para Swetz (1992), na sua discussão em relação ao manual matemático da ilha do mar (*Haidao Suanjing*), enfatiza o uso de dois ou mais passos de averiguação para resolver as situações problemas que envolvem as semelhanças de triângulos. Outro fator interessante a partir da discussão, era que as atividades matemáticas e os nove problemas do manual estavam relacionados à cartografia e a questões militares.

Ao estudar os problemas e seus métodos de solução, pode-se inferir que os chineses possuíam noções de alinhamentos, conhecimentos sobre medidas, noções de triângulos retângulos, noções de ângulos, noções de intersecção entre duas cordas, noções de altura, conhecimento sobre localização, além de conhecerem o conceito de divisão e frações, ou seja, são em especial conhecimentos geométricos que envolvem medidas e triângulos. Segundo Cooke (2005, p. 232, tradução nossa), "A medição é aritmética aplicada ao espaço, começando com figuras com faces ou lados planos."[48]

Diante disso, nota-se que os aspectos matemáticos presentes no *Haidao Suanjing* são diversos e envolvem instrumentos como o *gnomon,* descrito no tratado anterior aos *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, o *Zhoubi Suanjing*. Nesse tratado, o *gnomon* é considerado "o instrumento principal do antigo astrônomo chinês era o gnomon, usado para medir sombras solares ou, como aqui, para observações estelares"[49]. (CULLEN, 1996 p. 43, tradução nossa). Enquanto que Liu Hui, no *Haidao Suanjing*, utiliza o *gnomon* para o cálculo de distâncias de difícil acesso na agrimensura.

Segundo Kangshen, Crossley e Lun (1999), o *gnomon* também era usado como fio de prumo, usado para medir altura, profundidade, medir distâncias, desenhar um círculo, e dois *gnomons* formavam um quadrado.

> Na antiguidade, o gnômon era originalmente um instrumento para desenhar ângulos retos. É constituído por duas pernas perpendiculares graduadas, sendo a mais longa denominada gu, e a mais curta é o gou. Parece claro que o gnômon também era um instrumento de pesquisa.[50] (KANGSHEN; CROSSEY; LUN, 1999, p. 523, tradução nossa).

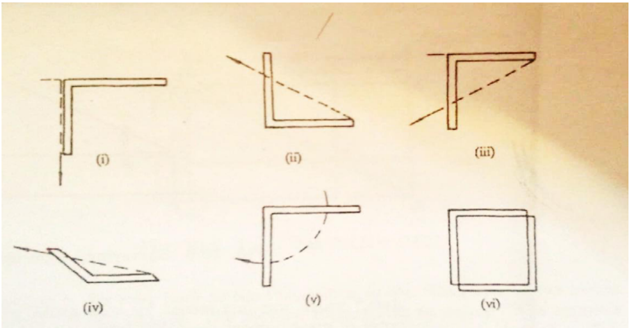
48 Measurement is arithmetic applied to space, beginning with figures having flat sides or faces. (COOKE, 2005, p. 232).

49 the primary instrument of the early Chinese astronomer was the gnomon, whether used to measure solar shadows, or as here for stellar observations. (CULLEN, 1996, p. 43).

50 In antiquity the gnomon was originally an instrument for drawing right an- gles. It is constructed of two perpendicular, graduated legs, the longer of which is called the gu, and the shorter the gou. It seems clear that the gnomon was also an instrument for surveying. (KANGSHEN; CROSSLEY; LUN, 1999, p. 523).

Dos problemas do tratado *Haidao Suanjing*, cinco usam o *gnomon*, esse instrumento possui um formato semelhante a um L, onde seu lado menor é chamado *gou*, e lado maior, *gu*. Veja a figura 1 sobre o uso desse instrumento.

Figura 1: Uso do gnomon (KANGSHEN; CROSSLEY; LUN, 1999, p. 523).



A seguir, apresentamos uma proposta de atividade para discussão na formação de professores, com o objetivo de conhecer as noções geométricas do tratado.

Proposta de atividade para a formação de professores, uma possibilidade do *Haidao Suanjing*

Para essa proposta de atividade escolhemos o problema cinco do tratado *Haidao Suanjing*, do chinês Liu Hui, do século III. Esse tratado está localizado no livro de Kangshen, Crossley e Lun (1999), *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*, como o décimo capítulo. O quinto problema é sobre medir um edifício ao nível do solo a partir de uma montanha.

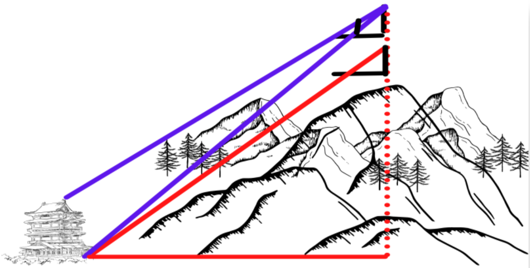
> Problema **5.** Agora examine um edifício em terreno plano a partir de uma montanha. Coloque um gnomon na montanha cujo *gou* tem 6 *chi* de altura; visualize da ponta do canal até a base do prédio. A linha de visão corta o *gu* inferior na altura de 1 *zhang* 2 *chi*. Configure outro gnomon [do mesmo tamanho] 3 *zhang* acima [do primeiro]. A linha de visão da ponta do *gou* até o pé do edifício corta o *gu* superior a uma altura de 1 *zhang* 1 *chi* 4 *cun*. Então, erga um pequeno polo verticalmente no ponto de convergência no *gu*. A linha de visão da ponta do *gou* até o topo do edifício corta o pequeno polo a uma altura de 8 *cun*. Diga: qual é a altura do edifício?[51]
>
> Resposta: *8 zhang*.
>
> Método: tome a diferença entre os comprimentos do *gu* inferior e superior como divisor. Multiplique a distância entre os dois gnomos pelo comprimento do *gu* inferior. Divida o produto pela altura do *gou*. Multiplique o quociente pela altura do polo pequeno como dividendo. Divida para obter a altura do edifício. (KANGSHEN; CROSSLEY; LUN, 1999, p. 548, tradução nossa).

O problema acima possui diversas potencialidades didáticas para a formação de professores, pois, é possível trabalhar os aspectos matemáticos em particular, generalizando para os problemas do cotidiano. Além disso, existem alguns termos de medidas e alguns conceitos de *gu* e *gou* que é necessário conhecermos para compreendermos esses aspectos.

51 **[Problem 5]** Now survey a building on level ground from a hill. Set a gnomon on the hill whose gou is 6 chi high; sight from the tip of the gou down onto the base of the building. The line of sight cuts the lower gu at height of 1 zhang 2 chi. Set up another gnomon [of the same size] 3 zhang above [the first one]. The line of sight from the tip of the gou onto the foot of the building cuts the upper gu at a height of 1 zhang 1 chi 4 cun. Then, erect a small pole vertically at the convergence point on the gu. The line of sight from the tip of the gou to the top of the building cuts the small pole at a height of 8 cun. Tell: what is the height of the building? (KANGSHEN; CROSSLEY; LUN, 1999, p. 548).

Com isso, a nossa primeira análise parte do estudo desse edifício que está ao nível do solo e de um indivíduo sobre uma montanha. Para facilitar a visualização do problema, veja a seguinte situação hipotética:

Figura 2: Representação do problema cinco do *Haidao Suanjing* elaborado pela autora (KANGSHEN; CROSSLEY; LUN, 1999, p. 548).



Esse indivíduo utiliza alguns instrumentos, entre eles o polo e o *gnomon*, que servem para medir a profundidade. Para Kangshen, Crossley e Lun (1999), o *gnomon* possui o *gou*, lado menor, que neste, é o lado que mede a altura e está na vertical, e o *gu* é o lado maior que está na horizontal.

De acordo com Kangshen, Crossley e Lun (1999, p. 07), "Os nove capítulos também definem 300 *bu* como *li,* então *1 li = 300 bu = 6 chi x 300 = 1800 chi*."[52] Dessa forma, ambos os instrumentos e as noções de medidas são importantes para entender o problema.

A seguir, no Quadro 2, observe a descrição da resolução do problema cinco pelo método de Liu Hui, no qual o *gu* inferior é *1zhang 2chi* e o *gu* superior *1 zhang 1 chi 4 cun.*

52 The Nine Chapters also defines 300 bu as li, so 1 li=300 bu = 6 chi x 300 = 1800 chi. (KANGSHEN; CROSSLEY; LUN, 1999, p. 07).

Quadro 2. Explicação do problema cinco pelo método de Liu Hui

(I) tome a diferença entre os comprimentos do *gu* inferior e superior como divisor	$1\ zhang\ 2\ chi \ - 1\ zhang\ 1\ chi\ 4\ cun =$ $120\ cun - 114\ cun = 6\ cun$
(II) Multiplique a distância entre os dois gnomos pelo comprimento do *gu* inferior	$300\ cun \times 120\ cun = 36000\ cun$
(III) Divida o produto pela altura do *gou*.	$\frac{36000\ cun}{60\ cun} = 600\ cun$
(IV) Multiplique o quociente pela altura do poste pequeno como dividendo	$600\ cun \times 8\ cun = 4800\ cun$
(V) Divida para obter a altura do edifício	$\frac{4800\ cun}{6\ cun} = 800\ cun$; *800 cun = 80 chi = 8 zhang*

Fonte: Elaborada pela autora (2021).

(I) "tome a diferença entre os comprimentos do *gu* inferior e superior como divisor". *1 zhang 2 chi - 1 zhang 1 chi 4 cun*. Transforme todas as medidas para *cun*. *1 zhang = 10 chi* e *1 chi = 10 cun*, logo *1 zhang* é *100 cun* e *2 chi* é *20 cun*. Dessa forma, a diferença acima fica: *120 cun - 114 cun = 6 cun*. (II) "Multiplique a distância entre os dois *gnomon* pelo comprimento do *gu* inferior", a distâncias entre eles são de *3 zhang* (veja o problema 05). *3 zhang = 300 cun* e o comprimento do *gu* inferior é *1 zhang 2 chi* ou *120 cun*, portanto: *300 cun × 120 cun = 36000 cun*. No passo (III) "divida o produto pela altura do *gou*." A altura do gou é *6 chi = 60 cun*. Logo, *(36000 cun)/(60 cun) = 600 cun*. (IV) "Multiplique o quociente pela altura do poste pequeno como dividendo." *600 cun × 8 cun = 4800 cun* e por último (V) "divida para obter a altura do edifício." Agora divida item (IV) pelo o (I), portanto, *(4800 cun)/(6 cun) = 800 cun*, *800 cun = 80 chi = 8 zhang*. Dessa forma, encontramos a resposta de Liu Hui *8 zhang*. (KANGSHEN; CROSSLEY; LUN, 1999, p. 548, tradução nossa).

A partir desse estudo, é possível usar os conhecimentos do método de resolução para outros problemas de medição de difícil acesso. Veja as propostas de atividades a seguir no Quadro 3:

Quadro 3. Proposta de atividade

	Atividade	Objetivos	Turma
1	Resolver problema cinco do *Haidao Suanjing*	Conhecer os aspectos matemáticos. Discutir as noções geométricas do problema.	História da Matemática
2	Generalizar a situação problema cinco para medir alturas de edifícios na atualidade	Resolver situações problemas da atualidade com os métodos de Liu Hui	História da Matemática

Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Considerações finais

É possível, a partir dos conhecimentos e resolução do problema cinco do tratado *Haidao Suanjing*, discutir elementos da matemática chinesa e possivelmente generalizar para outras situações do cotidiano. Infelizmente, alguns aspectos dos problemas não foram analisados, mas isso não interfere em um estudo preliminar na formação de professores.

As principais noções geométricas encontradas no problema cinco do tratado foram em relação ao cálculo da distância entre a montanha e o edifício, as medidas e o uso do *gnomon*. Almejamos que essa proposta possa servir como suporte para outras atividades, levantando questionamentos sobre as matemáticas chinesas. Além de contribuir para a formação de professores, como mencionado anteriormente, as pesquisas voltadas para o uso da história da matemática na formação dos professores a partir de tratado estão em expansão, mas isso não infere que a história não possa ser validada como instrumento de difusão e revalidação de saberes.

Segundo Santos (2007), um dos obstáculos de aprendizagem em matemática é a falta de contextualização, logo a segunda proposta de atividade permite ao professor generalizar recursos da história para questões do cotidiano. Com isso, se pode aproximar noções antigas com problemas práticos, e uma das maneiras para que isso ocorra sem anacronismos é usando os métodos de Liu Hui para resolver situações problemas envolvendo as mesmas limitações que os problemas do *Haidao Suanjing,* sem dialogar com a nossa matemática moderna.

Referências

COOKE, R. **The History of Mathematics**: a brief course. Canada: Wiley-Interscience, 2005.

CULLEN, C. **Astronomy and mathematics in ancient China**: the Zhou bi suanjing. New York, Cambridge University Press,1996.

KANGSHEN, S.; CROSSLEY, J. N.; LUN, A. W. C.. **The Nine Chapters on the Mathematical Art**: companion and commentary. Nova York: Oxford University Press, 1999.

KÖCHE, J. C. **Fundamentos de metodologia científica:** teoria da ciência e iniciação à pesquisa. Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.

PONTES, L. M.; BATISTA, A. N. DE S.; PEREIRA, A. C. C. A inserção de textos originais na disciplina de História da Matemática a partir de um problema do documento Sea Island Mathematical Manual. **Revemop**, v. 3, p. 1-9, 1 jan. 2021.

SA, H. S.; HEE, H. Y.; IL, K. C. Haidao Suanjing in Joseon Mathematics. **Journal For History of Mathematics.** Coréia, p. 259-270. dez. 2019.

SANTOS, C. A. dos. **A história da Matemática como ferramenta no processo de ensino-aprendizagem da Matemática**. 2007. 94 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional, Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SWETZ, F. J. **The Sea Island Mathematical Manual**: surveying and mathematics in ancient china. United States of America: Penn State University Press, 1992. 88 p.

CAPÍTULO ONZE

Uma investigação sobre os critérios para o uso de textos originais no ensino de matemática brasileiro[53]

Isabelle Coelho da Silva

É inquestionável que, cada vez mais, os pesquisadores[54] têm defendido o uso de documentos históricos para o ensino de matemática, como pode ser constatado nos demais capítulos deste livro. Muitas dessas pesquisas defendem que deve haver uma articulação entre história e ensino de matemática (SAITO; DIAS, 2013; SILVA; PEREIRA, 2021, PEREIRA; SAITO, 2019), de forma que os objetos de estudo de cada área não sejam sobrepostos[55], mas que as iniciativas foquem naquilo que ambas têm em comum: o conhecimento matemático.

Uma das formas de proporcionar isso é, justamente, através desses documentos originais, em que são "só livros e tratados, mas também cartas, manuscritos, minutas e outros documentos não só escritos, mas também aqueles da cultura material, tais como instrumentos, monumentos, máquinas etc." (SAITO, 2015, p. 27).

Entretanto, para fins práticos de pesquisas e propostas de atividades, é inviável utilizar, por exemplo, uma obra histórica completa. Desse modo, um recorte escrito dela pode ser selecionado

53 Essa dissertação foi orientada pela Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira, docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM/IFCE).

54 Vide Furinghetti, Jahnke e Maanen (2006) e Jankvist (2014) como exemplos desses pesquisadores.

55 Essa é uma característica de pesquisas pautadas em uma perspectiva historiográfica atualizada, mas há outras não veem essa articulação dessa forma, ou seja, que têm como base historiografias tradicionais. A esse respeito, vide Saito (2015).

para tal finalidade. De acordo com Silva e Pereira (2021, p. 231), um texto original

> [...] é a sua parte [de um documento] escrita. Como um documento pode ser uma obra grande, tratando de diversos assuntos, são esses textos que são selecionados dentro deles, para serem usados em sala de aula na busca da articulação entre História e ensino de Matemática.

Ao mesmo tempo em que o uso desse material é defendido, também é destacado a necessidade de uma dedicação mais acentuada do educador matemático que pretende articular história e ensino de matemática a partir dele. Assim, surgiu a precisão de se investigar esse material publicado no Brasil, a fim identificar os critérios utilizados para esta inserção.

Para tanto, a partir da literatura que trata do assunto, foram elencados sete critérios[56] para o uso de textos originais em sala de aula: escolha do material; forma de utilização; intencionalidade; série ou nível escolar; tratamento didático; momento de utilização; e perspectiva historiográfica.

Deste modo, neste capítulo, visamos discorrer sobre alguns dos resultados encontrados em uma análise sobre teses e dissertações de três programas de pós-graduação, que foram defendidas entre 2008 e 2017. Tal análise é parte de uma dissertação que objetivava investigar se essas propostas de articulação entre história e ensino de matemática a partir de textos originais utilizam algum critério para inserir esse material em sala de aula.

Assim, inicialmente, apresentamos o processo de coleta de dados para justificar as escolhas feitas e, em seguida, mostramos alguns dos resultados desta busca pelos critérios que esses textos utilizavam para inserir os originais em sala de aula.

56 Para saber mais sobre esses critérios, vide Silva e Pereira (2021).

Materiais e métodos: o processo de coleta de dados

A análise deste estudo teve a coleta de dados feita em três programas de pós-graduação de universidades brasileiras diferentes: a Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), campus Rio Claro; a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP); e a Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Essa escolha veio da base teórica de Silva (2018), em que várias das citações foram escritas por professores e alunos relacionados a essas instituições, caracterizando o prestígio que possuem pela produção de trabalhos relacionados à área da história da matemática.

A ideia inicial era fazer a busca em cinco programas de pós-graduação, sendo 2 da PUCSP, 2 da UFRN e 1 da UNESP, no período a partir da criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática até o final de 2017. Para isso, buscou-se nos sites desses programas as teses e dissertações defendidas até o momento da coleta de dados[57], o que pode ser visto no Quadro 1 a seguir.

Quadro 1: Coleta de dados inicial em cinco programas de pós-graduação

UNIVERSIDADE	PROGRAMA	CONCEITO CAPES[58]	Nº DE TESES/ DISSERTAÇÕES
PUCSP	Programa de Estudos Pós-Graduados em História da Ciência	Nota 4	268
PUCSP	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática	Nota 5	768
UNESP-RC	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática	Nota 6	391
UFRN	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática	Nota 4	155
UFRN	Programa de Pós-Graduação em Educação	Nota 5	766
		TOTAL	2348

Fonte: Elaborado pela autora

57 Essa coleta inicial foi realizada em 12 de abril de 2018, portanto, pode haver outros trabalhos defendidos, posteriormente, no ano de 2018.

58 Relatório de avaliação 2013-2016 – Quadrienal 2017.

A partir desse quadro, pode-se notar que o número de pesquisas realizadas era bem extenso. Entretanto, devido a este ser um estudo à nível de mestrado, cujo tempo para execução é limitado, foi decidido investigar apenas um programa de cada instituição, a partir das teses e dissertações defendidas entre 2008 e 2017. Assim, foram escolhidos o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP-RC, o Programa de Pós-Graduação em Educação da UFRN, e o Programa de Estudos Pós-Graduados em História da Ciência da PUCSP. Esta seleção foi feita pela possível diversidade de trabalhos que poderiam ser encontrados em cada uma destas pós-graduações.

Com esta delimitação, a busca por trabalhos que indicassem uma utilização de textos originais para o ensino foi iniciada. Para isso, foi feita uma pré-análise em cada uma das teses e dissertações, que consistia na leitura do seu título, resumo e sumário, a fim de identificar se havia alguma proposta em seu conteúdo. A observação do sumário foi importante para identificar aqueles estudos que não tinham como objetivo geral o uso de um original, mas que o sugeriam em algum momento.

Nesse sentido, como dois dos programas escolhidos não estavam voltados especificamente para o ensino ou para a educação matemática, durante a coleta também foram selecionadas aquelas publicações voltadas para essa área mais especifica. Os resultados podem sem visto no Quadro 2 a seguir.

Quadro 2: Resultados da coleta inicial de dados

Programa	Código[59]	Total de publicações pré-analisados	Total de publicações relacionados à Matemática	Total de publicações que propõem uso de textos originais para o ensino de matemática
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (UNESP-RC)	P1	267	267	6
Programa de Pós-Graduação em Educação (UFRN)	P2	617	54	10
Programa de Estudos Pós-Graduados em História da Ciência (PUCSP)	P3	201	15	2
TOTAL		1085	336	18

Fonte: Elaborado pela autora

Os resultados do Quadro 2 mostram que nos três programas escolhidos, entre 2008 e 2017, foram defendidas 1085 teses e dissertações. Dentre elas, 336 estavam relacionadas à matemática, o que foi constatado a partir da pré-análise descrevida anteriormente. Do mesmo modo, foram selecionados os 18 trabalhos que indicavam a possibilidade de alguma proposta para o ensino com a utilização de textos originais.

Dentre esses trabalhos, 05 eram dissertações, sendo 03 da UNESP-RC e 02 da PUCSP, e 13 eram teses, em que 03 foram defendidas na UNESP-RC e 10 na UFRN. O Quadro 3, a seguir, mostra quais foram esses trabalhos selecionados, quem são seus autores e orientadores, os anos de suas defesas e as instituições a que pertencem.

59 Esses códigos foram criados para indicar a forma como os programas foram referidos no decorrer do texto.

Quadro 3: Teses e Dissertações selecionadas na coleta de dados inicial

Código[60]	Título	Autor/Orientador	Ano	Local
D1	Algumas observações sobre a características de Euler: uma introdução de elementos da história da matemática no ensino médio	Mônica de Cássia Siqueira Martines	2009	UNESP-RC
D2	A coleção *História da Matemática para professores*: um estudo sobre possibilidades de uso por professores das séries finais do Ensino Fundamental	Helinton Mercatelli Neto	2009	UNESP-RC
D3	Análise de textos didáticos: três estudos	Fábio Donizeti de Oliveira	2008	UNESP-RC
D4	A contribuição da história da matemática na formação dos professores das séries iniciais	Jussara Teodoro de Faria	2010	PUCSP
D5	Régua de cálculo: uma contribuição de William Oughtred para a matemática	Elisa Missae Tanonaka	2008	PUCSP
T1	Uma possível produção de significados para as séries no livro Elementos de Álgebra de Leonhard Euler	Valéria Ostete Jannis Luchetta	2017	UNESP-RC
T2	Memórias das aritméticas da Emília: o ensino de aritmética entre 1920 e 1940	Adriel Gonçalves de Oliveira	2015	UNESP-RC
T3	Resolução de problemas no cenário da matemática discreta	Fernanda dos Santos Menino	2013	UNESP-RC
T4	A criatividade matemática de John Wallis na obra *Arithmetica Infinitorum*: contribuições para ensino de cálculo diferencial e integral na licenciatura em matemática	Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes	2017	UFRN
T5	Um estudo sobre a compreensão das definições matemáticas no curso de licenciatura em matemática	Enne Karol Venancio de Sousa	2015	UFRN

60 Esses códigos foram criados para indicar a forma como os trabalhos selecionados foram referidos no decorrer do texto, sendo que os códigos iniciados com a letra D estão relacionados à dissertações e os iniciados com a letra T estão relacionados à teses.

Código[60]	Título	Autor/Orientador	Ano	Local
T6	A história da matemática como metodologia de ensino: um estudo a partir do *Tratado Sobre o Triângulo Aritmético* de Blaise Pascal	Graciana Ferreira Dias	2014	UFRN
T7	Correspondências científicas como uma relação didática entre história e ensino de matemática: o exemplo das cartas de Euler a uma princesa da Alemanha	Daniele Esteves Pereira	2014	UFRN
T8	Reconceitualização das categorias de Skemp de compreensão relacional e compreensão instrumental como critérios globais	Georgiane Amorim Silva	2013	UFRN
T9	Um estudo sobre a apreciação do raciocínio matemático na formação inicial de professores	Francisca Vandilma Costa	2013	UFRN
T10	Ateliês de história e pedagogia da matemática: contribuições para a formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais	Lúcia Helena Bezerra Ferreira	2011	UFRN
T11	Possibilidades de exploração da história da ciência na formação do professor de matemática: mobilizando saberes a partir da obra de Nicolau Copérnico *De Revolutionibus Orbium Coelestium*	Maria José de Freitas Mendes	2010	UFRN
T12	Ensino de matemática, história da matemática e artefatos: Possibilidade de interligar saberes em cursos de formação de professores da Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental	Rosalba Lopes de Oliveira	2009	UFRN
T13	Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo	João Cláudio Brandemberg Quaresma	2009	UFRN

Fonte: Elaborado pela autora.

Essas foram as 18 publicações selecionadas a partir da leitura dos títulos, resumos e sumários dos trabalhos indicados no Quadro 2. Entretanto, após leitura mais detalhada do conteúdo dos mesmos, foi possível perceber que alguns não continham propostas de uso de textos originais em sala de aula, sendo eles: D2, que apenas buscava analisar uma coleção de livros quanto ao seu conteúdo conter subsídio para professores realizarem esta inserção; D3, que objetivava compreender o livro didático a partir de outras pesquisas que analisavam esse material; D4, que embora indicasse usar fontes primárias, incluindo propostas, não retratou uma possibilidade de inserção do documento original em sala de aula; D5, que trouxe exemplos de textos e documentos originais, mostrando exemplos de como realizar cálculos, mas sem propor algo para o ensino; T8, que utiliza um documento original em sua pesquisa, mas, além do seu uso para o ensino não ser o objetivo principal, não mostra algum texto desse material na escrita da tese, o que dificulta a sua análise; T9, que também usa um documento original, mas não traz textos dele; e T10, que apesar de trazer documentos originais no seu sumário, não apresenta textos originais para fazer suas propostas.

Portanto, essas teses e dissertações foram retiradas da análise que foi feita em nossa dissertação, totalizando onze estudos restantes para a investigação sobre os critérios utilizados pelos pesquisadores brasileiros para defender a inserção do texto original em sala de aula, se eles existem e quais são, conforme é discutido a seguir.

Resultados e discussões sobre a análise da presença dos critérios elencados nas pesquisas brasileiras

A fim de analisar o material citado quanto à presença dos critérios elencados anteriormente, fez-se uma divisão por categorias, que correspondem a cada um desses critérios[61]. A organi-

61 Uma análise mais detalhada de cada uma dessas categorias pode ser vista na íntegra em Silva

zação e categorização desses dados coletados e analisados foram pautadas na Análise de Conteúdo, de Bardin (1937, p. 31), que a define como "um conjunto de técnicas de análise das comunicações", possibilitando a busca de sentidos e uma descrição a partir de categorias elencadas com a coleta de dados advindas, por exemplo, de questionários ou documentos escritos. Neste caso, esses documentos são as teses e dissertações que utilizam textos originais para o ensino de matemática.

Para isso, seguimos as três fazes dessa metodologia. A primeira refere-se à pré-exploração do material, em que foram lidas as teses e dissertações selecionadas, a fim de apreender e organizar as informações e os aspectos importantes de forma não estruturada. Em seguida, adentrou-se na fase da seleção das unidades de análise, ou seja, a busca por frases, sentenças, palavras ou parágrafos que estivessem relacionados ao objeto dessa pesquisa. A última fase foi o processo de categorização, em as unidades de análise foram agrupadas com o propósito de exprimirem algum significado. Neste caso, essa classificação foi apriorística, isto é, baseada em categorias pré-definidas, que foram os critérios elencados no capítulo anterior. (CAMPOS, 2004).

Dessa forma, com a análise de conteúdo, busca-se não apenas produzir inferências sobre essas teses e dissertações coletadas, mas embasá-las com os pressupostos teóricos presentes na dissertação. Para isso, as categorias foram feitas com os critérios: escolha do material (C1); forma de utilização (C2); intencionalidade (C3); série ou nível escolar (C4); tratamento didático (C5); momento de utilização (C6); e perspectiva historiográfica (C7). Um resumo dos resultados desta análise pode ser visto a seguir:

(2018).

Quadro 4: Relação de critérios encontrados nas teses e dissertações

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
D1							
T1							
T2							
T3							
T4							
T5							
T6							
T7							
T11							
T13							

Fonte: Elaborado pela autora

O Quadro 4 mostra que nenhuma das pesquisas analisadas traz considerações sobre a escolha da perspectiva historiográfica (C7) ou sobre a necessidade de um tratamento didático (C5) dos textos originais escolhidos para serem inseridos em sala de aula. Isto pode acontecer devido ao pouco número de publicações voltadas para o educador matemático sobre o tema, em uma linguagem acessível para ele, ressaltando a importância da articulação entre história e educação matemática para a produção desses materiais.

Além disso, muitos dos autores usam o material dentro de uma perspectiva mais tradicional, principalmente, pela falta de conhecimento que eles têm de uma atualizada. Ou seja, muitas dessas pesquisas ainda têm como referência uma história da matemática dentro de uma vertente presentista, saindo do presente e do conteúdo que se quer ensinar, para ir ao passado e escolher o original.

Percebe-se também que muitos dos autores utilizaram traduções para os documentos originais escolhidos, o que mostra a dificuldade dos pesquisadores e educadores matemáticos em ler textos em outras línguas. Portanto, esse empasse também pode ser encontrado com os alunos, a quem as propostas são adereçadas, pois a maioria dos materiais originais escolhidos não estão em sua língua materna.

Em contrapartida, todos as teses e dissertações têm uma intencionalidade (C3), conforme estabelecido pelo referencial teórico proposto, pois todas visam o estudo de um texto original para o ensino, mesmo que feito de forma diferente.

O critério de seleção dos textos originais (C1) não é deixado claro para a maioria dos documentos analisados, em que alguns apenas indicam que era um documento que continha o conteúdo a ser tratado. Isso acontece, provavelmente, devido à escolha ingênua de uma historiografia presentista, que busca no passado aquilo que é conhecido no presente, ou seja, aquele conteúdo que será tratado em sala de aula. Portanto, a influência de uma história da matemática presentista e anacrônica já é percebida desde a escolha do material pelo educador matemático.

Além disso, a maioria traz a forma de utilização desses originais (C2), relacionando-os com o conteúdo escolhido, fazendo contextualizações da obra, do autor ou do conteúdo. Entretanto, a forma como essa procura pelo contexto foi realizada não é descrita, deixando em dúvida a importância dos dados relatados para o educador matemático.

Em relação ao momento de utilização (C6), menos da metade deles deixam nítido a etapa da aula em que o texto original seria utilizado ou o nível escolar a ser inserido. Isso faz com que as propostas não cheguem ao educador de forma clara, para que ele possa executá-las em suas salas de aula.

Portanto, a partir do Quadro 4, pode-se perceber que a maioria das pesquisas brasileiras ainda não têm critérios bem estabelecidos para a inserção de textos originais em sala de aula, em que muitos defendem que é importante, mas não deixam claro para o educador matemático como colocá-las em prática.

Considerações Finais

Publicações que envolvem a articulação entre história e ensino, muitas vezes, estão relacionadas a propostas de atividades para a sala de aula. De fato, devido à pouca formação que o educador matemático tem em relação a este tema, isto se tornou necessário para que este tipo de ação chegasse na sala de aula. Contudo, o crescimento desse número de propostas que partiam de um texto histórico implicou na necessidade de uma discussão sobre os critérios que estariam sendo considerados pelos autores no Brasil.

Salientamos, ainda, que esta pesquisa não pode ser considerada finalizada, uma vez que é necessário que outros estudos sejam realizados, analisando se existem demais critérios didáticos e historiográficos. Além disso, desde a realização desse estudo, diversas teses e dissertações foram defendidas, em que muitas tratam de textos históricos e precisam ser analisadas quanto aos critérios que levaram em consideração para elaborar suas propostas.

Por fim, embora este livro tenha a intenção de mostrar atividades para o ensino de matemática com base em tratados históricos, não poderíamos deixar de trazer uma discussão presente em nosso grupo de pesquisa. Os textos originais continuam cada vez mais presentes em estudos da área, portanto, ainda é necessário que continuemos o debate sobre os critérios para sua inserção em sala de aula.

Referências

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70 Ltda, 1977.

CAMPOS, Claudinei José Gomes. Método de análise de conteúdo: ferramenta para a análise de dados qualitativos no campo da saúde. **Revista Brasileira de Enfermagem**, Brasília, v. 57, n. 5, p.611-614, out. 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/reben/v57n5/a19v57n5>. Acesso em: 08 ago. 2018.

COSTA, Francisca Vandilma. **Um estudo sobre a apreciação do raciocínio matemático na formação inicial de professores.** 2013. 197 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

DIAS, Graciana Ferreira. **A história da matemática como metodologia de ensino:** um estudo a partir do Tratado Sobre o Triângulo Aritmético de Blaise Pascal. 2014. 191 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

FARIA, Jussara Teodoro de. **A contribuição da história da matemática na formação dos professores das séries iniciais**. 2010. 73 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

FERREIRA, Lúcia Helena Bezerra. **Ateliês de história e pedagogia da matemática:** contribuições para a formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais. 2011. 215 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

FURINGHETTI, Fulvia; JAHNKE, Hans Neals; MAANEN, Jan van. **Mini-workshop on studying original sources in mathematics education**. Oberwolfach Reports 3(2), 2006. p. 1285–1318.

JANKVIST, Uffe Thomas. On the use of primary sources in the teaching and learning of Mathematics. In: MATTHEWS, Michael R. (Ed.). **International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching**. Dordrecht: Springer, 2014. Cap. 27. p. 873-907.

LOPES, Gabriela Lucheze de Oliveira. **A criatividade matemática de John Wallis na obra Arithmetica Infinitorum:** contribuições para ensino de cálculo diferencial e integral na licenciatura em matemática. 2017. 197 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.

LUCHETTA, Valéria Ostete Jannis. **Uma possível produção de significados para as séries no livro Elementos de Álgebra de Leonhard Euler**. 2017. 244 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017.

MARTINES, Mônica de Cássia Siqueira. **Algumas observações sobre a características de Euler:** uma introdução de elementos da história da matemática no ensino médio. 2009. 119 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

MENDES, Maria José de Freitas. **Possibilidades de exploração da história da ciência na formação do professor de matemática:** mobilizando saberes a partir da obra de Nicolau Copérnico De Revolutionibus Orbium Coelestium. 2010. 193 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

MENINO, Fernanda dos Santos. **Resolução de problemas no cenário da matemática discreta**. 2013. 289 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

MERCATELLI NETO, Helinton. **A coleção História da Matemática para professores:** um estudo sobre possibilidades de uso por professores das séries finais do ensino fundamental. 2009. 95 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

OLIVEIRA, Adriel Gonçalves de. **Memórias das aritméticas da Emília:** o ensino de aritmética entre 1920 e 1940. 2015. 201 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

OLIVEIRA, Fábio Donizeti de. **Análise de textos didáticos:** três estudos. 2008. 222 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

OLIVEIRA, Rosalba Lopes de. **Ensino de matemática, história da matemática e artefatos:** Possibilidade de interligar saberes em cursos de formação de professores da Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental. 2009. 217 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. A reconstrução do Báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. **Revista Cocar,** Belém, v. 13, n. 25, pp. 342-372, 2019.

PEREIRA, Daniele Esteves. **Correspondências científicas como uma relação didática entre história e ensino de matemática:** o exemplo das cartas de Euler a uma princesa da Alemanha. 2014. 280 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

QUARESMA, João Cláudio Brandemberg. **Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo.** 2009. 188 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.

SAITO, Fumikazu. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Ed. Livraria da Física/SBHMat, 2015. [ISBN: 978-85-7861-372-3]

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Interface entre História da Matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência e Educação**, v.19, no1, p. 89-111, 2013.

SILVA, Georgiane Amorim. **Reconceitualização das categorias de Skemp de compreensão relacional e compreensão instrumental como critérios globais**. 2013. 151 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

SILVA, Isabelle Coelho da. **Um estudo da incorporação de textos originais para a educação matemática:** buscando critérios na articulação entre história e ensino. 2018. 92 f. Dissertação (Mestrado) -Curso de Mestrado em Ensino de Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2018.

SILVA, Isabelle Coelho da; Pereira, Ana Carolina Costa. Definições e critérios para uso de textos originais na articulação entre história e ensino de matemática. **Boletim de Educação Matemática** – *Bolema* [online]. 2021, vol.35, n.69, pp.223-241. Epub-Apr16, 2021. ISSN 1980-4415.https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a11.

SOUSA, Enne Karol Venancio de. **Um estudo sobre a compreensão das definições matemáticas no curso de licenciatura em matemática**. 2015. 175 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015.

TANONAKA, Elisa Missae. **Régua de cálculo:** uma contribuição de william oughtred para a matemática. 2008. 103 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

DADOS DOS AUTORES

Ana Carolina Costa Pereira é pós-doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP) e docente do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE).

Andressa Gomes dos Santos é licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará, mestranda do programa de pós-graduação em ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará e bolsista da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP).

Antonia Naiara de Sousa Batista é licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE), mestra em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE/2018) e doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da Universidade Estadual do Ceará (UECE).

Claudiana Oliveira de Sousa é licenciada em Matemática pela Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central - FECLESC/UECE e mestranda do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Ciências e Tecnologia do Ceará.

Dianara Figueirêdo Freire é licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE), Campus Quixadá – CE e mestranda programa de pós-graduação em ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará (IFCE).

Francisco Wagner Soares Oliveira é doutorando pelo Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da Universidade Estadual do Ceará (UECE). Mestre em Ensino de Ciências e Matemática e graduado em licenciatura em matemática, ambos pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE).

Gisele Pereira Oliveira, é doutoranda em Educação pelo Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (PPGE/UECE) e docente efetiva e Matemática da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC).

Isabelle Coelho da Silva é doutoranda em Educação Matemática pela PUC-SP e membro da diretoria da SBEM-CE. É mestra em Ensino de Ciências e Matemática pelo PGECM/IFCE e licenciada em Matemática pela UECE e pela Universidade de Pittsburgh.

Raniele Sampaio Nogueira é licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE), mestranda em Educação pelo Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (PPGE/UECE) e docente efetiva e Matemática da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC).

Rebeca Oliveira Amarante é licenciada em matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC), especialização em Ensino de Matemática pela Faculdade Futura, ICETEC e mestranda pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM), no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE).

Thalya Cristiny de Sousa Masseno é licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE) e mestranda programa de pós-graduação em ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará (IFCE).

Verusca Batista Alves é mestra em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) e docente do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE).